Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Geometrie

Sommersemester 2019

Übungsblatt 6 21. Mai 2019

Aufgabe 20. (5 = 3+2 Punkte)

Sei $Q(X,Y)$ die quadratische Form in zwei Variablen

$$Q(X,Y) \coloneqq 17X^2 - 12XY + 8Y^2.$$

(a) Bestimmen Sie eine orthogonale Variablensubstitution, d.h.

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad S \in \mathrm{O}(2),$$

so dass Q die Gestalt

$$Q(X,Y) = \lambda U^2 + \mu V^2$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ annimmt.

(b) Skizzieren Sie ebene Quadrik

$$\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; Q(x,y) = 5 \}$$

und ihre Hauptachsen.

Lösungsskizze zu Aufgabe 20:

(a) Es gilt $Q(X,Y) = (X,Y)A(X,Y)^t$ mit der symmetrischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen eine ONB von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A. Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_A(X) = (X-17)(X-8) - 6^2 = X^2 - 25X + 100$$

mit Nullstellen $\frac{1}{2}(25 \pm 15)$, also 5 und 20. Wir berechnen den Eigenraum V_5 zum Eigenwert 5:

$$5 \cdot \mathbf{1} - A = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{1}{6} \;\urcorner^{1} \\ \mid \cdot \frac{1}{3} \;\hookleftarrow \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten die Basis

$$b_1' \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

von V_5. Da A symmetrisch ist, ist der Eigenraum V_{20} zum Eigenwert 20 orthogonal zu V_5 und hat damit die Basis

$$b_2' := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Normalisieren liefert die ONB

$$(b_1, b_2) := (\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix})$$

von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A. Ist S die Inverse (= Transponierte) der orthogonalen Matrix mit Spalten $[b_1, b_2]$, also

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

dann gilt $A = S^{\mathrm{t}} \operatorname{diag}(5, 20) S$ und mit $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} := S \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, also

$$\begin{aligned} U &:= \frac{1}{\sqrt{5}}(X + 2Y), \\ V &:= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2X + Y) \end{aligned}$$

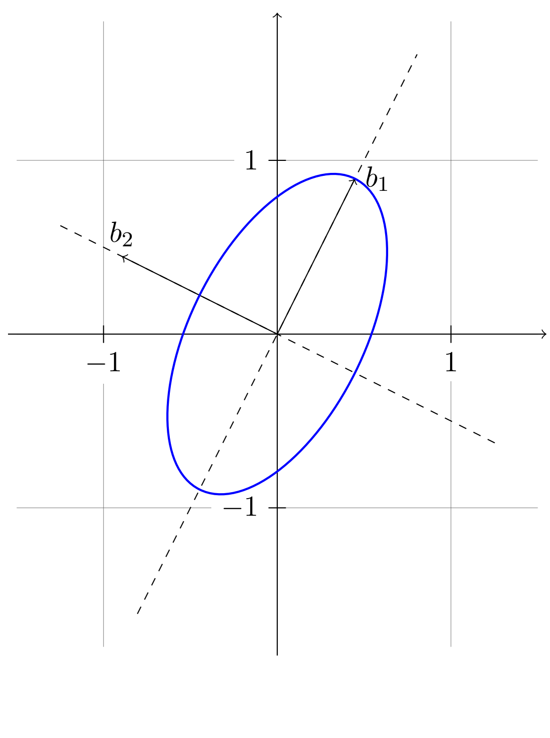
nimmt Q Diagonalgestalt an:

$$Q(X, Y) = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} S^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 5 & \\ & 20 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 5U^2 + 20V^2.$$

(b) Die Gleichung $5u^2 + 20v^2 = 5$, äquivalent

$$u^2 + (2v)^2 = 1,$$

beschreibt eine Ellipse mit Halbachsen der Länge 1 und 1/2 entlang der Hauptachsen $\langle b_1 \rangle_{\mathbb{R}}$ und $\langle b_2 \rangle_{\mathbb{R}}$:



Aufgabe 21. (3 Punkte)

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist die ebene Quadrik

$$V_a := \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 + axy + y^2 = 1 \}$$

eine Ellipse/Hyperbel/Vereinigung zweier Geraden?

Lösungsskizze zu Aufgabe 21:

Es gilt $x^2 + ax + y^2 = (x, y)A(x, y)^{\mathrm{t}}$ mit der Matrix

$$A_a := \begin{pmatrix} 1 & a/2 \\ a/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Gestalt der ebenen Quadrik hängt von der Signatur von A_a ab. Wir bringen A_a durch symmetrische Zeilen- und Spaltenumformungen in Diagonalform:

$$\overset{-a/2}{\begin{pmatrix} 1 & a/2 \\ a/2 & 1 \end{pmatrix}} \; {}^{-a/2} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 - (a/2)^2 \end{pmatrix}.$$

Die Signatur hängt davon ab, ob $1 - (a/2)^2$ positiv, Null, oder negativ ist:

- falls $|a| < 2 \;\Rightarrow\;$ Signatur $(2, 0, 0) \;\Rightarrow\;$ Ellipse,
- falls $|a| = 2 \;\Rightarrow\;$ Signatur $(1, 0, 1) \;\Rightarrow\;$ paralleles Geradenpaar,
- falls $|a| > 2 \;\Rightarrow\;$ Signatur $(1, 1, 0) \;\Rightarrow\;$ Hyperbel.

In geeigneten (nicht notwendigerweise orthogonalen) Koordinaten (u, v) wird die Gleichung zu $u^2 + v^2 = 1$ bzw. $u^2 = 1$ bzw. $u^2 - v^2 = 1$.

Aufgabe 22. (4 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{C}}(V) \geq 2$. Zeigen Sie, dass es keine anisotrope symmetrische Bilinearform auf V gibt. Was ist mit $\dim_{\mathbb{C}}(V) < 2$?

Lösungsskizze zu Aufgabe 22:

Sei $\langle\ ,\ \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Wegen $2 \in \mathbb{C}^\times$ existiert eine Orthogonalbasis $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ von V bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$. Die Gram'sche Matrix bezüglich $\mathscr{B}$ hat dann Diagonalgestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Falls $\lambda_i = 0$ für ein i gilt, also $\langle b_i, b_i \rangle = 0$, dann ist die Bilinearform ausgeartet und insbesondere nicht anisotrop. Gelte also $\lambda_i \neq 0$ für alle i. In $\mathbb{C}$ besitzt jedes Element eine Quadratwurzel, insbesondere existieren $a_i \in \mathbb{C}$ mit $a_i^2 = \lambda_i$. Mit $b'_i := a_i^{-1} b_i$ gilt dann $\langle b'_i, b'_i \rangle = 1$, d.h. $\mathscr{B}' = (b_1,', \ldots, b'_n)$ ist eine ONB und die Gram'sche Matrix von $\langle\ ,\ \rangle$ bezüglich $\mathscr{B}'$ ist die Einheitsmatrix. Für $v := b'_1 + i b'_2 \neq 0$ gilt dann

$$\langle v, v \rangle = 1^2 + i^2 = 0,$$

somit ist $\langle\ ,\ \rangle$ nicht anisotrop.

Die eindeutige Bilinearform auf dem Nullvektorraum ist schon deswegen anisotrop, weil es keine Vektoren ungleich 0 gibt. Auf dem 1-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ ist das Standardskalarprodukt anisotrop, denn aus $x^2 = 0$ folgt $x = 0$ für $x \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 23. (4 Punkte)

Bringen Sie die quadratische Form

$$Q(X, Y, Z) \coloneqq 2XY + 2XZ + 2YZ$$

durch eine orthogonale lineare Variablentransformation in Diagonalgestalt. Welche Form hat die Quadrik

$$V \coloneqq \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;;\; Q(x, y, z) = 1 \right\}?$$

Lösungsskizze zu Aufgabe 23:

Die quadratische Form wird durch die symmetrische Matrix

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Wir müssen eine ONB von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A berechnen. Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} X & -1 & -1 \\ -1 & X & -1 \\ -1 & -1 & X \end{pmatrix} = X^3 - 3X - 2.$$

Wir raten die erste Nullstelle 2 und faktorisieren

$$\chi_A(X) = (X - 2)(X^2 + 2X + 1) = (X - 2)(X + 1)^2$$

mittels Polynomdivision. Somit hat A den einfachen Eigenwert 2 und den Eigenwert -1 mit algebraischer Vielfachheit 2. Wir berechnen eine Basis des Eigenraums V_2 zum Eigenwert 2:

$$2\mathbb{1} - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dies führt zum Eigenvektor

$$b_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Diesen Eigenvektor und Eigenwert hätte man auch direkt erkennen können, indem man beobachtet, dass die Summe jeder Zeile von A gleich 2 ist.) Da A symmetrisch ist, ist A automatisch diagonalisierbar mit zueinander orthogonalen Eigenräumen. Damit ist der

Eigenraum V_{-1} zum Eigenwert -1 das orthogonale Komplement von V_2 . Eine Basis ist (b_2, b_3) mit

$$b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

denn die Vektoren sind zu b_1 orthogonal und linear unabhängig. (Natürlich kann man auch wie gewohnt eine Basis von V_{-1} mittels des Gauß-Verfahrens berechnen.) Die Basis muss noch mit dem Gram–Schmidt-Verfahren orthogonalisiert werden:

$$\begin{aligned} b_2' &:= b_2, \\ b_3' &:= b_3 - \frac{\langle b_3, b_2' \rangle}{\langle b_2', b_2' \rangle} b_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir durch Normalisierung eine ONB aus Eigenvektoren: $\tilde{\mathscr{B}} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3)$ mit

$$\tilde{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Sei

$$S := [\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3]^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

dann gilt $A = S^{\mathrm{t}} \operatorname{diag}(2, -1, -1) S$, und mit der orthogonalen Variablensubstitution

$$\begin{aligned} U &:= \tfrac{1}{\sqrt{3}}(X + Y + Z), \\ V &:= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(X - Y), \\ W &:= \tfrac{1}{\sqrt{6}}(X + Y - 2Z) \end{aligned}$$

nimmt Q Diagonalgestalt an:

$$Q(X, Y, Z) = 2XY + 2XZ + 2YZ = 2U^2 - V^2 - W^2.$$

Die Gleichung der Quadrik lautet

$$V^2 + W^2 = 2U^2 - 1,$$

es handelt sich um ein zweischaliges Hyperboloid. Die beiden Schalen entsprechen den Punkten mit $U \geq 1/\sqrt{2}$ bzw. $U \leq -1/\sqrt{2}$.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **28. Mai 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6–8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/76786705/Geometrie`
