

## Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2019

### Übungsblatt 3

11. Juni 2019

#### Aufgabe 9. (4 = 2+1+1 Punkte)

Sei

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 1 & 7 & 6 & 10 & 4 & 2 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}.$$

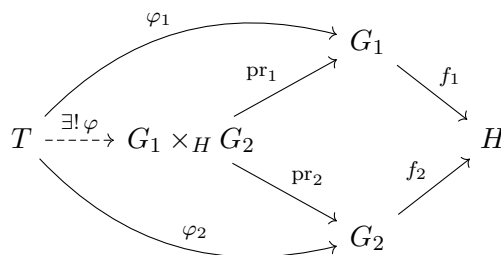
- (a) Stellen Sie  $\sigma$  als Produkt von disjunkten Zykeln dar.
- (b) Stellen Sie  $\sigma$  als Produkt von Transpositionen dar.
- (c) Bestimmen Sie die Ordnung von  $\sigma$ .

#### Aufgabe 10. (4 = 1+1+2 Punkte)

Seien  $f_1 : G_1 \rightarrow H$  und  $f_2 : G_2 \rightarrow H$  Gruppenhomomorphismen. Das *Faserprodukt* von  $G_1$  und  $G_2$  über  $H$  (entlang  $f_1$  und  $f_2$ ) ist die Untergruppe von  $G_1 \times G_2$  gegeben durch

$$G_1 \times_H G_2 := \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 ; f_1(g_1) = f_2(g_2)\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $G_1 \times_H G_2$  wie behauptet eine Untergruppe von  $G_1 \times G_2$  ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Projektionsabbildungen  $\text{pr}_i : G_1 \times_H G_2 \rightarrow G_i$ , definiert durch  $\text{pr}_i(g_1, g_2) = g_i$  für  $i = 1, 2$  Gruppenhomomorphismen sind.
- (c) Sei  $T$  eine Gruppe und seien  $\varphi_i : T \rightarrow G_i$  für  $i = 1, 2$  Gruppenhomomorphismen mit  $f_1 \circ \varphi_1 = f_2 \circ \varphi_2$  als Gruppenhomomorphismen  $T \rightarrow H$ . Zeigen Sie, dass es genau einen Gruppenhomomorphismus  $\varphi : T \rightarrow G_1 \times_H G_2$  gibt mit  $\varphi_i = \text{pr}_i \circ \varphi$  für  $i = 1, 2$ .



— bitte wenden —

**Aufgabe 11.** (4 = 2+2 Punkte)

Konstruieren Sie jeweils einen Gruppenisomorphismus:

(a)  $\mathbb{R}^\times / \{\pm 1\} \cong \mathbb{R}_{>0}$ ;

(b)  $GL_n(\mathbb{R}) / GL_n^+(\mathbb{R}) \cong \{\pm 1\}$  für  $n \geq 1$ .

Hierbei bezeichnet  $GL_n^+(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$  die Untergruppe der Matrizen mit positiver Determinante.

**Aufgabe 12.** (4 Punkte)

Sei  $G$  eine Gruppe und  $H \subseteq G$  eine Untergruppe vom Index  $(G : H) = 2$ . Zeigen Sie, dass  $H$  ein Normalteiler ist.

---

**Abgabe:** Am kommenden Dienstag, den **18. Juni 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6–8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

[http://www.uni-frankfurt.de/76786679/Grundlagen\\_der\\_Algebra](http://www.uni-frankfurt.de/76786679/Grundlagen_der_Algebra)

---