Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

# Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2019

**Übungsblatt 1** 28. Mai 2019

**Aufgabe 1.** (4 Punkte)

Sei $G$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass $G$ genau dann abelsch ist, wenn die Verknüpfungsabbildung

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G, \\ (g_1, g_2) &\longmapsto g_1 g_2 \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

**Lösungsskizze zu Aufgabe 1:**

Wir erinnern uns, dass die Verknüpfung, bezüglich derer das kartesische Produkt $G \times G$ eine Gruppe ist, die komponentenweise Verknüpfung in $G$ ist:

$$(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) \coloneqq (g_1 h_1, g_2 h_2) \quad \text{für} \quad g_1, g_2, h_1, h_2 \in G.$$

Bezeichne $m : G \times G \to G$ die Verknüpfungsabbildung, dann ist $m$ genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn für alle $g_1, g_2, h_1, h_2 \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} & m((g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2)) = m(g_1, g_2) \cdot m(h_1, h_2) \\ \Leftrightarrow\ & g_1 h_1 \cdot g_2 h_2 = g_1 g_2 \cdot h_1 h_2 \\ \Leftrightarrow\ & h_1 g_2 = g_2 h_1, \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichung aus der vorletzen ergibt, indem man man von links mit $g_1^{-1}$ und von rechts mit $h_2^{-1}$ multipliziert. Dies ist nun äquivalent dazu, dass $G$ abelsch ist.

**Aufgabe 2.** (5 = 2+2+1 Punkte)

Sei $K$ ein Körper und $\mathrm{Aff}^1(K)$ die Menge der Polynome der Form $aX + b$ mit $a \in K^\times$ und $b \in K$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aff}^1(K)$ bezüglich der Verknüpfung $(f, g) \mapsto (f \circ g)(X) \coloneqq f(g(X))$ eine Gruppe ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aff}^1(K)$ nicht abelsch ist, wenn $|K| > 2$ gilt. Was ist mit $K = \mathbb{F}_2$?

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Aff}^1(K) &\longrightarrow \mathrm{GL}_2(K), \\ aX + b &\longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

**Lösungsskizze zu Aufgabe 2:**

(a) Wir prüfen die Gruppenaxiome für $\mathrm{Aff}^1(K)$:

- Assoziativität: Für $f, g, h \in \mathrm{Aff}^1(K)$ gilt
$$((f \circ g) \circ h)(X) = (f \circ g)(h(X)) = f(g(h(X)) = f((g \circ h)(X)) = (f \circ (g \circ h))(X).$$
- Neutrales Element ist $\mathrm{id}(X) := X$, denn für alle $f \in \mathrm{Aff}^1(K)$ gilt
$$(f \circ \mathrm{id})(X) = f(X) = (\mathrm{id} \circ f)(X).$$
- Für das Inverse von $f(X) = aX + b$ machen wir den Ansatz $g(X) = cX + d$. Es muss gelten:
$$\begin{aligned} X &= (f \circ g)(X) = a(cX + d) + b = acX + ad + b, \\ X &= (g \circ f)(X) = c(aX + b) + d = acX + cb + d, \end{aligned}$$
also $ac = 1$ und $ad + b = cb + d = 0$. Mit $c = 1/a$ und $d = -b/a$ ist dies erfüllt, das Inverse ist also $\frac{1}{a}X - \frac{b}{a}$.

(b) Wir betrachten die Elemente $f(X) = X + 1$ und $g(X) = aX$ für $a \in K^\times$. Es gilt
$$\begin{aligned} (f \circ g)(X) &= aX + 1, \\ (g \circ f)(X) &= a(X + 1) = aX + a. \end{aligned}$$
Wenn $|K| > 2$ gilt, können wir $a \neq 1$ in $K^\times$ wählen, dann ist $f \circ g \neq g \circ f$ und somit $\mathrm{Aff}^1(K)$ nicht abelsch. Im Fall $K = \mathbb{F}_2$ besteht $\mathrm{Aff}^1(\mathbb{F}_2)$ nur aus zwei Elementen,
$$\mathrm{Aff}^1(\mathbb{F}_2) = \{X, X + 1\},$$
und diese kommutieren miteinander, die Gruppe ist also abelsch.

(c) Bezeichne $i : \mathrm{Aff}^1(K) \to \mathrm{GL}_2(K)$ die gegebene Abbildung. Für $f(X) = aX + b$ und $g(X) = cX + d$ in $\mathrm{Aff}^1(K)$ gilt dann
$$\begin{aligned} i(f \circ g) &= i(a(cX + d) + b) = i(acX + ad + b) = \begin{pmatrix} ac & ad + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ i(f) \cdot i(g) &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
also $i(f \circ g) = i(f) \cdot i(g)$. Damit ist $i$ ein Gruppenhomomorphismus.

**Aufgabe 3.** (3 = 1+1+1 Punkte)

Welche der folgenden Teilmengen sind Untergruppen?

(a) $\mathbb{R}^\times \subseteq (\mathbb{R}, +)$;

(b) $\{2^n \; ; \; n \in \mathbb{Z}\} \subseteq (\mathbb{Q}^\times, \cdot)$;

(c) $\{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \; ; \; A \text{ diagonalisierbar } \} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

**Lösungsskizze zu Aufgabe 3:**

(a) $\mathbb{R}^\times \subseteq (\mathbb{R}, +)$ ist keine Untergruppe: das neutrale Element 0 von $\mathbb{R}$ ist nicht enthalten.

(b) $U := \{2^n \;;\; n \in \mathbb{Z}\} \subseteq (\mathbb{Q}^\times, \cdot)$ ist eine Untergruppe: es gilt $1 = 2^0 \in U$ und für $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt $2^n \cdot (2^m)^{-1} = 2^n \cdot 2^{-m} = 2^{n-m} \in U$. Alternativ kann man argumentieren, dass $U$ als Bild des Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}^\times,\ n \mapsto 2^n$ eine Untergruppe ist.

(c) Die diagonalisierbaren Matrizen in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ bilden keine Untergruppe: Zum Beispiel sind

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ($A$ ist schon diagonal und $B$ hat das charakteristische Polynom $X^2 - 1$, welches in zwei verschiedene Linearfaktoren zerfällt), aber das Produkt

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat nicht zerfallendes charakteristisches Polynom $X^2 + 1$ und ist damit über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar. Ein anderes Gegenbeispiel ist

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B' := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

wobei $B'$ ebenfalls mit den zwei verschiedenen Eigenwerten 1 und $-1$ diagonalisierbar ist, während das Produkt

$$A'B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nicht diagonalisierbar ist: der einzige Eigenwert ist 1, aber der zugehörige Eigenraum ist nicht ganz $\mathbb{R}^2$, da die Matrix nicht die Einheitsmatrix ist.

**Aufgabe 4.** (4 = 2+2 Punkte)

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Sei $G^{\mathrm{op}} := G$ als Menge, aber ausgestattet mit der Verknüpfung

$$g \cdot^{\mathrm{op}} h := h \cdot g.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(G^{\mathrm{op}}, \cdot^{\mathrm{op}})$ eine Gruppe ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $g \mapsto g^{-1}$ einen Isomorphismus $G \cong G^{\mathrm{op}}$ definiert.

**Lösungsskizze zu Aufgabe 4:**

(a) Wir prüfen die Gruppenaxiome:

- Assoziativität: Für $g, h, k \in G^{\mathrm{op}}$ gilt

  $$(g \cdot^{\mathrm{op}} h) \cdot^{\mathrm{op}} k = k \cdot (g \cdot^{\mathrm{op}} h) = k \cdot (h \cdot g) \overset{\text{Ass.}}{=} (k \cdot h) \cdot g = (h \cdot^{\mathrm{op}} k) \cdot g = g \cdot^{\mathrm{op}} (h \cdot^{\mathrm{op}} k),$$

  wobei wir die Assoziativität der Verknüpfung von $G$ benutzt haben.

- Neutrales Element von $G^{\mathrm{op}}$ ist das neutrale Element $e$ von $G$, denn für alle $g \in G^{\mathrm{op}}$ gilt
$$g \cdot^{\mathrm{op}} e = e \cdot g = g = g \cdot e = e \cdot^{\mathrm{op}} g.$$
- Das Inverse von $g \in G^{\mathrm{op}}$ stimmt mit dem Inversen $g^{-1}$ in $G$ überein:
$$g \cdot^{\mathrm{op}} g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e = g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot^{\mathrm{op}} g.$$

(b) Bezeichne $i : G \to G^{\mathrm{op}}$ die Inversenabbildung: $i(g) = g^{-1}$. Dies ist ein Gruppenhomomorphismus, denn für $g, h \in G$ gilt
$$i(g \cdot h) = (g \cdot h)^{-1} = h^{-1} \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot^{\mathrm{op}} h^{-1} = i(g) \cdot^{\mathrm{op}} i(h).$$
Außerdem ist $i$ bijektiv: Die Umkehrabbildung ist die Inversenabbildung selbst, denn für $g \in G$ gilt $(g^{-1})^{-1} = g$. Damit ist $i : G \to G^{-1}$ ein Gruppenisomorphismus.

---

**Abgabe:** Am kommenden Dienstag, den **4. Juni 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6–8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/76786679/Grundlagen_der_Algebra`

---