Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2019

Übungsblatt 4 18. Juni 2019

Vereinbarung: „Ring“ bedeute grundsätzlich „kommutativer Ring“.

Aufgabe 13. (4 = 2+1+1 Punkte)

Sei X eine Menge und R ein Ring. Sei $V \subseteq X$ eine Teilmenge und $I(V) \subseteq \mathrm{Abb}(X,R)$ die Menge aller $f : X \to R$, so dass $f(x) = 0$ für alle $x \in V$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass $I(V)$ ein Ideal in $\mathrm{Abb}(X,R)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Einschränkungsabbildung $\mathrm{Abb}(X,R) \to \mathrm{Abb}(V,R)$, $f \mapsto f|_V$, surjektiv ist.

(c) Leiten Sie einen Ringisomorphismus

$$\mathrm{Abb}(X,R)/I(V) \cong \mathrm{Abb}(V,R)$$

her.

Aufgabe 14. (3 Punkte)

Sei R ein Ring und $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in R[\![X]\!]$ eine formale Potenzreihe mit Koeffizienten in R. Zeigen Sie:

$$f \in R[\![X]\!]^{\times} \iff a_0 \in R^{\times}.$$

Aufgabe 15. (4 = 2+1+1 Punkte)

Sei R ein Ring und $N \subseteq R$ die Menge der nilpotenten Elemente:

$$N := \{x \in R\ ;\ \exists n \in \mathbb{N} : x^n = 0\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass N ein Ideal in R ist.

(b) Ein Ring S heißt *reduziert*, wenn 0 das einzige nilpotente Element von S ist, d.h. für $s \in S$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$s^n = 0 \ \Rightarrow s = 0.$$

Zeigen Sie, dass R/N reduziert ist.

(c) Sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus in einen reduzierten Ring S. Zeigen Sie, dass ein eindeutiger Ringhomomorphismus $\overline{\varphi} : R/N \to S$ existiert, so dass mit der Quotientenabbildung $q : R \to R/N$ gilt: $\varphi = \overline{\varphi} \circ q$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "q"'] & & S \\ & R/N \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Aufgabe 16. (5 = 1+1+1+2 Punkte)

Sei K ein Körper.

(a) Zeigen Sie, dass jedes Polynom $f \in K[X]$ modulo dem Ideal (X^2) zu genau einem Polynom der Form $a + bX$ mit $a, b \in K$ kongruent ist.

(b) Sei $K[\varepsilon]$ die Menge der formalen Ausdrücke $a + b\varepsilon$ mit $a, b \in K$ mit den Verknüpfungen

$$(a + b\varepsilon) + (c + d\varepsilon) \coloneqq (a + c) + (b + d)\varepsilon,$$
$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) \coloneqq ac + (bc + ad)\varepsilon.$$

Zeigen Sie, dass $K[\varepsilon]$ ein Ring und zum Faktorring $K[X]/(X^2)$ isomorph ist.

(c) Bestimmen Sie die Einheitengruppe $K[\varepsilon]^\times$.

(d) Sei R ein Ring und $\varphi : R \to K[\varepsilon]$ ein Ringhomomorphismus. Für $f \in R$ schreiben wir formal

$$\varphi(f) = f(0) + \partial f\, \varepsilon,$$

mit $f(0), \partial f \in K$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f \mapsto f(0)$ ein Ringhomomorphismus $R \to K$ ist, und dass für $f, g \in R$ gilt:

$$\partial(fg) = f(0)\partial g + g(0)\partial f.$$

Bitte füllen Sie die Online-Evaluationsumfrage zum Lernzentrum aus, die Sie über den Link oder den QR-Code erreichen.

`goethe.link/lzt`

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **25. Juni 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6–8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/76786679/Grundlagen_der_Algebra`
