

## Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2019

### Übungsblatt 5

25. Juni 2019

#### Aufgabe 17. (3 Punkte)

Sei  $K$  ein Körper. Zeigen Sie, dass der Polynomring  $K[X]$  unendlich viele normierte irreduzible Polynome enthält.

*Hinweis: Folgen Sie dem Euklidischen Beweis für den Ring  $\mathbb{Z}$ .*

#### Aufgabe 18. (6 = 2+1+1+2 Punkte)

- (a) Sei  $K$  ein Körper und  $f \in K[X]$  mit  $\deg(f) \in \{2, 3\}$ . Zeigen Sie:  $f$  ist genau dann irreduzibel, wenn  $f$  keine Nullstelle in  $K$  besitzt.
- (b) Zeigen Sie, dass die Aussage in (a) für Polynome von Grad 4 im Allgemeinen falsch ist.
- (c) Zeigen Sie, dass  $f(X) = X^3 + 2X + 1$  in  $\mathbb{F}_3[X]$  irreduzibel ist.
- (d) Sei  $\alpha \in \mathbb{F}_3[X]/(X^3 + 2X + 1)$  die Restklasse von  $X$ . Stellen Sie  $\alpha^{-1}$  und  $\alpha^5$  als  $\mathbb{F}_3$ -Linearkombination von  $1, \alpha, \alpha^2$  dar.

#### Aufgabe 19. (3 Punkte)

Sei  $R$  ein Hauptidealring und  $x, y \in R$ . Zeigen Sie, dass für  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$x^n \mid y^n \Rightarrow x \mid y.$$

#### Aufgabe 20. (4 = 3+1 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus ganze Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$ , so dass gilt:

$$2019a + 130b = 1.$$

- (b) Bestimmen Sie eine ganze Zahl  $x \in \mathbb{Z}$ , so dass gilt:

$$x \equiv 1 \pmod{2019},$$

$$x \equiv 2 \pmod{130}.$$

*Die Lösung von Aufgabe 20(b) benötigt Stoff aus der Vorlesung am Dienstag 2.7. und kann eine Woche später abgegeben werden.*

**Abgabe:** Am kommenden Dienstag, den **2. Juli 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6–8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

[http://www.uni-frankfurt.de/76786679/Grundlagen\\_der\\_Algebra](http://www.uni-frankfurt.de/76786679/Grundlagen_der_Algebra)