Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2019

Übungsblatt 3 11. Juni 2019

Aufgabe 9. (4 = 2+1+1 Punkte)

Sei

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 1 & 7 & 6 & 10 & 4 & 2 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}.$$

(a) Stellen Sie σ als Produkt von disjunkten Zykeln dar.

(b) Stellen Sie σ als Produkt von Transpositionen dar.

(c) Bestimmen Sie die Ordnung von σ.

Lösungsskizze zu Aufgabe 9:

(a) Wir berechnen:

$$\begin{aligned} &\sigma(1) = 3, \quad \sigma(3) = 7, \quad \sigma(7) = 2, \quad \sigma(2) = 1, \\ &\sigma(4) = 6, \quad \sigma(6) = 4, \\ &\sigma(5) = 10, \quad \sigma(10) = 8, \quad \sigma(8) = 5, \\ &\sigma(9) = 9. \end{aligned}$$

Damit ist σ in Zykelschreibweise gegeben durch

$$\sigma = (1, 3, 7, 2)(4, 6)(5, 10, 8).$$

(b) Ein allgemeiner Zykel hat eine Darstellung als Produkt von Transpositionen mittels

$$(a_1, \ldots, a_r) = (a_1, a_r) \cdots (a_1, a_3)(a_1, a_2).$$

Damit erhalten wir:

$$\sigma = (1, 2)(1, 7)(1, 3)(4, 6)(5, 8)(5, 10).$$

(c) Die Ordnung eines Produkts von disjunkten Zykeln ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Zykellängen. Somit ist

$$\operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{kgV}(4, 2, 3) = 12.$$

Aufgabe 10. (4 = 1+1+2 Punkte)

Seien $f_1 : G_1 \to H$ und $f_2 : G_2 \to H$ Gruppenhomomorphismen. Das *Faserprodukt* von G_1 und G_2 über H (entlang f_1 und f_2) ist die Untergruppe von $G_1 \times G_2$ gegeben durch

$$G_1 \times_H G_2 := \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 \ ; \ f_1(g_1) = f_2(g_2)\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $G_1 \times_H G_2$ wie behauptet eine Untergruppe von $G_1 \times G_2$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Projektionsabbildungen $\mathrm{pr}_i : G_1 \times_H G_2 \to G_i$, definiert durch $\mathrm{pr}_i(g_1, g_2) = g_i$ für $i = 1, 2$ Gruppenhomomorphismen sind.

(c) Sei T eine Gruppe und seien $\varphi_i : T \to G_i$ für $i = 1, 2$ Gruppenhomomorphismen mit $f_1 \circ \varphi_1 = f_2 \circ \varphi_2$ als Gruppenhomomorphismen $T \to H$. Zeigen Sie, dass es genau einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : T \to G_1 \times_H G_2$ gibt mit $\varphi_i = \mathrm{pr}_i \circ \varphi$ für $i = 1, 2$.

$$\begin{tikzcd}
 & & G_1 \arrow[dr, "f_1"] & \\
T \arrow[r, dashed, "\exists!\,\varphi"] \arrow[urr, bend left, "\varphi_1"] \arrow[drr, bend right, "\varphi_2"'] & G_1 \times_H G_2 \arrow[ur, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & & H \\
 & & G_2 \arrow[ur, "f_2"] &
\end{tikzcd}$$

Lösungsskizze zu Aufgabe 10:

(a) Wir prüfen die Untergruppenkriterien. Es gilt $(1, 1) \in G_1 \times_H G_2$ wegen

$$f_1(1) = 1 = f_2(1).$$

Seien $(g_1, g_2), (g_1', g_2') \in G_1 \times_H G_2$, dann gilt $(g_1 g_1'^{-1},\, g_2 g_2'^{-1}) \in G_1 \times_H G_2$ wegen

$$f_1(g_1 g_1'^{-1}) = f_1(g_1) f_1(g_1')^{-1} = f_2(g_2) f_2(g_2')^{-1} = f_2(g_2 g_2'^{-1}).$$

(b) Für $(g_1, g_2), (g_1', g_2') \in G_1 \times_H G_2$ gilt

$$\mathrm{pr}_i(g_1 g_1', g_2 g_2') = g_i g_i' = \mathrm{pr}_i(g_1, g_2)\, \mathrm{pr}_i(g_1', g_2'),$$

damit ist pr_i ein Gruppenhomomorphismus.

(c) Angenommen, $\varphi : T \to G_1 \times_H G_2$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit $\varphi_i = \mathrm{pr}_i \circ \varphi$ für $i = 1, 2$. Sei $t \in T$ und $\varphi(t) = (g_1, g_2)$, dann gilt

$$g_i = \mathrm{pr}_i(\varphi(t)) = \varphi_i(t).$$

Somit ist

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \quad \text{für alle} \quad t \in T.$$

Dies zeigt schon die Eindeutigkeit von φ. Sei umgekehrt φ durch $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ definiert. Dies ist ein Gruppenhomomorphismus, denn für $t, t' \in T$ gilt

$$\varphi(tt') = (\varphi_1(tt'), \varphi_2(tt')) = (\varphi_1(t)\varphi_1(t'), \varphi_2(t)\varphi_2(t')) = \varphi(t)\varphi(t').$$

Nach Definition von φ gilt $\varphi_i = \mathrm{pr}_i \circ \varphi$ für $i = 1, 2$. Damit ist auch die Existenz gezeigt.

Aufgabe 11. (4 = 2+2 Punkte)

Konstruieren Sie jeweils einen Gruppenisomorphismus:

(a) $\mathbb{R}^\times/\{\pm 1\} \cong \mathbb{R}_{>0}$;

(b) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \cong \{\pm 1\}$ für $n \geq 1$.
Hierbei bezeichnet $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ die Untergruppe der Matrizen mit positiver Determinante.

Lösungsskizze zu Aufgabe 11:

(a) Der Homomorphismus $\mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto x^2$ hat Bild $\mathbb{R}_{>0}$ und Kern $\{\pm 1\}$ (vgl. Aufgabe 5 (a), Blatt 2). Nach dem Homomorphiesatz induziert dies einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{R}^\times/\{\pm 1\} \cong \mathbb{R}_{>0}$, $\{\pm x\} \mapsto x^2$. Anstelle der Abbildung $x \mapsto x^2$ kann man auch $x \mapsto |x|$ oder allgemeiner $x \mapsto |x|^a$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ benutzen.

(b) Bezeichne $\mathrm{sign} : \mathbb{R}^\times \to \{\pm 1\}$ die Vorzeichenabbildung, also

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} +1, & \text{falls } x > 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Dies ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $\mathbb{R}_{>0}$. Betrachten wir nun die Abbildung

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \{\pm 1\}, \quad A \mapsto \mathrm{sign}(\det(A)).$$

Dies ist surjektiv wegen

$$\det \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Der Kern besteht aus den Matrizen $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $\det(A) > 0$, ist also durch $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ gegeben. Nach dem Homomorphiesatz erhalten wir einen Gruppenisomorphismus

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \cong \{\pm 1\}, \quad A\,\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{sign}(\det(A)).$$

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe vom Index $(G : H) = 2$. Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler ist.

Lösungsskizze zu Aufgabe 12:

Sei $g \in G$. Wir müssen $gH = Hg$ zeigen. Im Fall $g \in H$ handelt es sich um die triviale Links- und Rechtsnebenklasse: $gH = H = Hg$. Gelte also $g \notin H$, dann ist $gH \neq H$ und $Hg \neq H$. Da $(G : H) = 2$ gilt, gibt es außer H und gH keine weiteren Linksnebenklassen. Jedes Element von G, das nicht in H liegt, muss in der Nebenklasse gH liegen. Es gilt also $gH = G \setminus H$. Das gleiche gilt für die Rechtsnebenklasse Hg, also erhalten wir

$$Hg = G \setminus H = gH.$$

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **18. Juni 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6–8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/76786679/Grundlagen_der_Algebra`
