Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2019

Präsenzaufgabenblatt 6 2. Juli 2019

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Q}$-Modul endlich erzeugt ist, aber nicht als $\mathbb{Z}$-Modul.

Aufgabe 2.

Sei R ein Ring und M, N zwei R-Moduln. Zeigen Sie: Sind M und N endlich erzeugt, dann auch $M \oplus N$.

Aufgabe 3.

Sei M ein Modul über einem Hauptidealring. Sei $x \in M$ und seien $a, b \in R$ teilerfremd mit $ax = 0$ und $bx = 0$. Zeigen Sie: $x = 0$.

Aufgabe 4.

Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Kette von Untermoduln. Zeigen Sie, dass $N \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ ein Untermodul von M ist.

Aufgabe 5.

Sei R ein Ring und $\Delta \coloneqq \{(x,x)\ ;\ x \in R\} \subseteq R^2$. Zeigen Sie, dass Δ ein R-Untermodul von R^2 ist, und konstruieren Sie einen Isomorphismus

$$R^2/\Delta \cong R.$$