Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2019

Übungsblatt 6 2. Juli 2019

Aufgabe 21. (3 Punkte)

Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $N \subseteq M$ ein Untermodul. Zeigen Sie: Wenn N und M/N endlich erzeugt sind, dann auch M.

Aufgabe 22. (4 = 1+2+1 Punkte)

Sei R ein Ring. Zur Erinnerung: Ein Element $a \in R$ ist ein *Nullteiler*, wenn $ab = 0$ für ein $b \in R$ mit $b \neq 0$ gilt. Ein Element x eines R-Moduls M ist ein *Torsionselement*, wenn $ax = 0$ für einen Nicht-Nullteiler $a \in R$ gilt.

(a) Zeigen Sie: Sind $a, b \in R$ keine Nullteiler, dann auch nicht ab.

(b) Sei M ein R-Modul. Zeigen Sie, dass die Torsionselemente einen Untermodul $M_{\text{tors}} \subseteq M$ bilden.

(c) Zeigen Sie, dass der Faktormodul M/M_{tors} *torsionsfrei* ist, d.h. keine Torsionselemente außer 0 besitzt.

Aufgabe 23. (5 = 2+3 Punkte)

(a) Sei K ein Körper, $r \geq 1$ und $P(X) \in K[X]$ ein normiertes nicht-konstantes Polynom. Zeigen Sie: Das Minimalpolynom des Jordankästchens $J_r(P)$ ist $P(X)^r$.

(b) Sei K ein Körper, $s \in \mathbb{N}_0$, $r_1, \dots, r_s \geq 1$ und $P_1, \dots, P_s \in K[X]$ irreduzible normierte Polynome. Sei A die Matrix in Jordan-Normalform

$$A := \begin{pmatrix} \boxed{J_{r_1}(P_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_{r_s}(P_s)} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{s} P_i(X)^{r_i},$$
$$m_A(X) = \prod_{P} P(X)^{m_P},$$

wobei P alle irreduziblen normierten Polynome durchläuft und

$$m_P := \max\{r_i \,;\, P_i = P,\, 1 \leq i \leq s\}$$

mit $m_P := 0$, falls $P \neq P_i$ für alle i.

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 24. (4 = 2+2 Punkte)

(a) Sei R ein Ring, M ein R-Modul, $n \in \mathbb{N}_0$ und $f : M \twoheadrightarrow R^n$ ein surjektiver Modulhomomorphismus. Zeigen Sie: Es gibt einen Untermodul $N \subseteq M$, so dass die innere Summenzerlegung $M = \ker(f) \oplus N$ gilt.

(b) Sei $f : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $f(x) = x \pmod 2$. Zeigen Sie, dass es keinen $\mathbb{Z}$-Untermodul N von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ gibt, so dass $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \ker(f) \oplus N$ gilt.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **9. Juli 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6–8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/76786679/Grundlagen_der_Algebra`
