Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2019

Übungsblatt 4 18. Juni 2019

Vereinbarung: „Ring“ bedeute grundsätzlich „kommutativer Ring“.

Aufgabe 13. (4 = 2+1+1 Punkte)

Sei X eine Menge und R ein Ring. Sei $V \subseteq X$ eine Teilmenge und $I(V) \subseteq \mathrm{Abb}(X, R)$ die Menge aller $f : X \to R$, so dass $f(x) = 0$ für alle $x \in V$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass $I(V)$ ein Ideal in $\mathrm{Abb}(X, R)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Einschränkungsabbildung $\mathrm{Abb}(X, R) \to \mathrm{Abb}(V, R)$, $f \mapsto f|_V$, surjektiv ist.

(c) Leiten Sie einen Ringisomorphismus

$$\mathrm{Abb}(X, R)/I(V) \cong \mathrm{Abb}(V, R)$$

her.

Lösungsskizze zu Aufgabe 13:

(a) Wir prüfen die Idealkriterien:
- Die Nullabbildung $0 \in \mathrm{Abb}(X, R)$ liegt in $I(V)$, da für alle $x \in V$ gilt: $0(v) = 0$.
- Sind $f, g \in I(V)$, dann auch $f + g \in I(V)$, da für alle $x \in V$ gilt:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0.$$

- Ist $a \in \mathrm{Abb}(X, R)$ und $f \in I(V)$, dann auch $af \in I(V)$, da für alle $x \in V$ gilt:

$$(af)(x) = a(x)f(x) = a(x) \cdot 0 = 0.$$

Alternativ kann man auch benutzen, dass $I(V)$ der Kern der Einschränkungsabbildung $\mathrm{Abb}(X, R) \to \mathrm{Abb}(V, R)$, $f \mapsto f|_V$ ist, und dass Kerne von Ringhomomorphismen Ideale sind.

(b) Sei $g \in \mathrm{Abb}(V, R)$, dann definieren wir eine Fortsetzung $f \in \mathrm{Abb}(X, R)$ durch

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} g(x), & \text{falls } x \in V, \\ 0, & \text{falls } x \notin V. \end{cases}$$

Dann ist $f|_V = g$, also f ein Urbild von g unter der Einschränkungsabbildung.

(c) Die Einschränkungsabbildung $\mathrm{Abb}(X, R) \to \mathrm{Abb}(V, R)$ ist gemäß (b) surjektiv, ihr Kern ist $I(V)$, damit liefert der Homomorphiesatz für Ringe einen Isomorphismus

$$\mathrm{Abb}(X, R)/I(V) \cong \mathrm{Abb}(V, R), \quad f + I(V) \mapsto f|_V.$$

Aufgabe 14. (3 Punkte)

Sei R ein Ring und $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in R[\![X]\!]$ eine formale Potenzreihe mit Koeffizienten in R. Zeigen Sie:

$$f \in R[\![X]\!]^\times \;\Leftrightarrow\; a_0 \in R^\times.$$

Lösungsskizze zu Aufgabe 14:

Sei $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in R[\![X]\!]$. Dies ist per Definition eine Einheit, wenn eine Potenzreihe $g = \sum_{j=0}^{\infty} b_j X^j \in R[\![X]\!]$ existiert, so dass $fg = 1$ gilt. Es ist

$$fg = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j \Big) X^k,$$

und Koeffizientenvergleich liefert

$$fg = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 b_0 = 1 \text{ und } \sum_{i+j=k} a_i b_j = 0 \text{ für } k \geq 1.$$

Wenn f eine Einheit ist, also ein solches g existiert, dann ist a_0 eine Einheit in R wegen $a_0 b_0 = 1$. Umgekehrt, falls a_0 eine Einheit in R ist, setzen wir $b_0 = a_0^{-1}$ und für $k \geq 1$ induktiv

$$b_k \coloneqq -a_0^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} a_{k-j} b_j.$$

Dann gilt nach Konstruktion $fg = 1$.

Aufgabe 15. (4 = 2+1+1 Punkte)

Sei R ein Ring und $N \subseteq R$ die Menge der nilpotenten Elemente:

$$N \coloneqq \{x \in R \,;\, \exists n \in \mathbb{N} : x^n = 0\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass N ein Ideal in R ist.

(b) Ein Ring S heißt *reduziert*, wenn 0 das einzige nilpotente Element von S ist, d.h. für $s \in S$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$s^n = 0 \;\Rightarrow s = 0.$$

Zeigen Sie, dass R/N reduziert ist.

(c) Seien $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus in einen reduzierten Ring S. Zeigen Sie, dass ein eindeutiger Ringhomomorphismus $\overline{\varphi} : R/N \to S$ existiert, so dass mit der Quotientenabbildung $q : R \to R/N$ gilt: $\varphi = \overline{\varphi} \circ q$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "q"'] & & S \\ & R/N \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Lösungsskizze zu Aufgabe 15:

(a) Wir prüfen die Idealkriterien:

- Es gilt $0 \in N$ wegen $0^1 = 0$.
- Seien $x, y \in N$, dann existieren $n, m \in \mathbb{N}$ mit $x^n = y^m = 0$. Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$(x+y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k}.$$

  In jedem Summanden gilt entweder $k \geq n$ oder $n+m-k > m$, im ersten Fall ist $x^k = x^n x^{k-n} = 0$, im zweiten ist $y^{n+m-k} = y^m y^{n-k} = 0$. Damit sind alle Summanden gleich 0 und es gilt $(x+y)^{n+m} = 0$, somit $x + y \in N$.
- Sei $a \in R$ und $x \in N$. Es existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$, dann folgt $ax \in N$ wegen

$$(ax)^n = a^n x^n = a^n \cdot 0 = 0.$$

(b) Für $x \in R$ bezeichne $[x] \in R/N$ die Restklasse von x modulo N. Ist $[x] \in R/N$ nilpotent, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $[x]^n = 0$, also $[x^n] = 0$. Dies bedeutet $x^n \in N$, somit existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $(x^n)^m = 0$ in R. Es folgt

$$x^{nm} = (x^n)^m = 0,$$

somit ist x nilpotent in R, also $[x] = 0$ in R/N.

(c) Der Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ bildet nilpotente Elemente auf nilpotente Elemente ab: Ist $x \in R$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$, dann gilt

$$\varphi(x)^n = \varphi(x^n) = \varphi(0) = 0.$$

Da S reduziert ist, werden alle nilpotenten Elemente von φ auf 0 abgebildet, $N \subseteq \ker(\varphi)$. Nach der universellen Eigenschaft des Quotienten R/N existiert ein eindeutiger Ringhomomorphismus $\overline{\varphi} : R/N \to S$, gegeben durch $[x] \mapsto \varphi(x)$, so dass $\varphi = \overline{\varphi} \circ q$ gilt.

Aufgabe 16. (5 = 1+1+1+2 Punkte)

Sei K ein Körper.

(a) Zeigen Sie, dass jedes Polynom $f \in K[X]$ modulo dem Ideal (X^2) zu genau einem Polynom der Form $a + bX$ mit $a, b \in K$ kongruent ist.

(b) Sei $K[\varepsilon]$ die Menge der formalen Ausdrücke $a + b\varepsilon$ mit $a, b \in K$ mit den Verknüpfungen

$$(a+b\varepsilon) + (c+d\varepsilon) \coloneqq (a+c) + (b+d)\varepsilon,$$
$$(a+b\varepsilon)(c+d\varepsilon) \coloneqq ac + (bc+ad)\varepsilon.$$

Zeigen Sie, dass $K[\varepsilon]$ ein Ring und zum Faktorring $K[X]/(X^2)$ isomorph ist.

(c) Bestimmen Sie die Einheitengruppe $K[\varepsilon]^\times$.

(d) Sei R ein Ring und $\varphi : R \to K[\varepsilon]$ ein Ringhomomorphismus. Für $f \in R$ schreiben wir formal

$$\varphi(f) = f(0) + \partial f \, \varepsilon,$$

mit $f(0), \partial f \in K$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f \mapsto f(0)$ ein Ringhomomorphismus $R \to K$ ist, und dass für $f, g \in R$ gilt:

$$\partial(fg) = f(0)\partial g + g(0)\partial f.$$

Lösungsskizze zu Aufgabe 16:

(a) Sei $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in K[X]$ ein Polynom. Wir können $n \geq 1$ annehmen, indem wir nötigenfalls $a_0 = 0$ und $a_1 = 0$ setzen. Dann gilt

$$f - (a_0 + a_1 X) = X^2(a_2 + \ldots + a_n X^{n-2}) \in (X^2),$$

also

$$f \equiv a_0 + a_1 X \bmod (X^2).$$

Angenommen, f ist modulo (X^2) sowohl zu $a + bX$ als auch zu $a' + b'X$ mit $a, a', b, b' \in K$ kongruent. Dann gilt

$$\begin{aligned} & a + bX \equiv a' + b'X \bmod (X^2) \\ \Rightarrow\ & (a - a') + (b - b')X \in (X^2) \\ \Rightarrow\ & \exists g \in K[X] : (a - a') + (b - b')X = X^2 g. \end{aligned}$$

Wäre $g \neq 0$, dann hätte $X^2 g$ Grad ≥ 2, während die linke Seite höchstens Grad 1 hat. Es muss also $g = 0$ gelten und damit $a = a'$ und $b = b'$. Dies zeigt die Eindeutigkeit.

(b) Bezeichne $[f] = f + (X^2)$ die Restklasse eines Polynoms f in $K[X]/(X^2)$. Unter Benutzung von (a) haben wir eine bijektive Abbildung

$$\varphi : K[X]/(X^2) \to K[\varepsilon], \quad [a + bX] \mapsto a + b\varepsilon \quad (a, b \in K).$$

Für $a, b, c, d \in K$ gilt

$$\begin{aligned} [a + bX][c + dX] &= [ac + (bc + ad)X + bdX^2] \\ &= [ac + (bc + ad)X], \qquad \text{(wegen } bdX^2 \equiv 0 \bmod (X^2)) \\ [a + bX] + [c + dX] &= [a + c + (b + d)X], \end{aligned}$$

somit überführt φ die Verknüpfungen von $K[X]/(X^2)$ in die von $K[\varepsilon]$, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \varphi([a + bX])\varphi([c + dX]) &= \varphi([a + bX][c + dX]), \\ \varphi([a + bX]) + \varphi([c + dX]) &= \varphi([a + bX] + [c + dX]). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $K[\varepsilon]$ ein Ring und φ ein Ringisomorphismus ist, die Ringeigenschaften übertragen sich alle mittels φ von $K[X]/(X^2)$ auf $K[\varepsilon]$.

(c) Ein Element $a + b\varepsilon \in K[\varepsilon]$ ist genau dann eine Einheit, wenn $c + d\varepsilon \in K[\varepsilon]$ existiert, so dass $(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = 1$ gilt, also

$$ac = 1, \quad ad + bc = 0.$$

Insbesondere ist dann $a \neq 0$. Umgekehrt, falls $a \neq 0$ ist, können wir $c := 1/a$ und $d := -bc/a$ setzen, dann sind obige Gleichungen erfüllt und $c + d\varepsilon$ ist ein Inverses zu $a + b\varepsilon$. Die Einheitengruppe ist somit

$$K[\varepsilon]^\times = \{a + b\varepsilon \ ; \ a \in K^\times, \ b \in K\}.$$

(d) Sei $\varphi : R \to K[\varepsilon]$ ein Ringhomomorphismus, $\varphi(f) = f(0) + \partial f \varepsilon$. Für $f, g \in R$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi(f+g) &= \varphi(f) + \varphi(g) \\ &= (f(0) + \partial f \varepsilon) + (g(0) + \partial g \varepsilon) \\ &= (f(0) + g(0)) + (\partial f + \partial g)\varepsilon,\end{aligned}$$

somit

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0), \quad \partial(f+g) = \partial f + \partial g.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\varphi(fg) &= \varphi(f)\varphi(g) \\ &= (f(0) + \partial f \varepsilon)(g(0) + \partial g \varepsilon) \\ &= f(0)g(0) + (g(0)\partial f + f(0)\partial g)\varepsilon,\end{aligned}$$

somit

$$(fg)(0) = f(0)g(0), \quad \partial(fg) = g(0)\partial f + f(0)\partial g.$$

Dadurch ist schon die zweite Aussage gezeigt. Damit $f \mapsto f(0)$ ein Ringhomomorphismus $R \to K$ ist, fehlt nur noch $1(0) = 1$, und das folgt aus

$$\varphi(1) = 1 = 1 + 0\varepsilon.$$

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **25. Juni 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6–8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/76786679/Grundlagen_der_Algebra`