Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

# Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2019

**Übungsblatt 6** 2. Juli 2019

**Aufgabe 21.** (3 Punkte)

Sei $R$ ein Ring, $M$ ein $R$-Modul und $N \subseteq M$ ein Untermodul. Zeigen Sie: Wenn $N$ und $M/N$ endlich erzeugt sind, dann auch $M$.

**Lösungsskizze zu Aufgabe 21:**

Seien $n_1, \ldots, n_r$ Erzeuger von $N$ und $\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_s}$ Erzeuger von $M/N$ mit Repräsentanten $m_1, \ldots, m_s \in M$. Wir zeigen, dass $n_1, \ldots, n_r, m_1 \ldots, m_s$ ein Erzeugendensystem von $M$ bilden, so dass auch $M$ endlich erzeugt ist. Sei $x \in M$, dann existieren $a_1, \ldots, a_s \in R$ mit

$$p(x) = \sum_{i=1}^{s} a_i \overline{m_i},$$

wobei $p : M \to M/N$ die Quotientenabbildung bezeichnet. Dann gilt

$$p(x - \sum_{i=1}^{s} a_i m_i) = p(x) - \sum_{i=1}^{s} a_i \overline{m_i} = 0,$$

also $x - \sum_{i=1}^{s} a_i m_i \in \ker(p) = N$. Dann existieren $b_1, \ldots, b_r \in R$ mit

$$x - \sum_{i=1}^{s} a_i m_i = \sum_{j=1}^{r} b_j n_j,$$

somit

$$x = \sum_{j=1}^{r} b_j n_j + \sum_{i=1}^{s} a_i m_i \in \langle n_1, \ldots, n_r, m_1, \ldots, m_s \rangle_R.$$

**Aufgabe 22.** (4 = 1+2+1 Punkte)

Sei $R$ ein Ring. Zur Erinnerung: Ein Element $a \in R$ ist ein *Nullteiler*, wenn $ab = 0$ für ein $b \in R$ mit $b \neq 0$ gilt.

(a) Zeigen Sie: Sind $a, b \in R$ keine Nullteiler, dann auch nicht $ab$.

(b) Sei $M$ ein $R$-Modul. Zeigen Sie, dass die Torsionselemente einen Untermodul $M_{\mathrm{tors}} \subseteq M$ bilden.

(c) Zeigen Sie, dass der Faktormodul $M/M_{\mathrm{tors}}$ *torsionsfrei* ist, d.h. keine Torsionselemente außer 0 besitzt.

**Lösungsskizze zu Aufgabe 22:**

(a) Ein Element $a \in R$ ist ein Nicht-Nullteiler, wenn für alle $x \in R$ gilt:

$$ax = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Seien $a, b \in R$ Nicht-Nullteiler und $x \in R$ mit $abx = 0$. Da $a$ Nicht-Nullteiler ist, folgt $bx = 0$, und da $b$ Nicht-Nullteiler ist, folgt $x = 0$. Damit ist auch $ab$ ein Nicht-Nullteiler.

(b) Wir prüfen die Untermodulkriterien:

- Es gilt $1 \cdot 0 = 0$ in $M$. Das Element $1 \in R$ ist kein Nullteiler, denn aus $1 \cdot x = 0$ folgt $x = 0$ für $x \in R$. Damit gilt $0 \in M_{\text{tors}}$.
- Seien $x, y \in M_{\text{tors}}$, dann existieren Nicht-Nullteiler $a, b \in R$ mit $ax = 0$ und $by = 0$. Es folgt

$$ab(x+y) = abx + aby = b(ax) + a(by) = b \cdot 0 + a \cdot 0 = 0.$$

  Gemäß (a) ist $ab$ kein Nullteiler, somit gilt $x + y \in M_{\text{tors}}$.
- Sei $r \in R$ und $x \in M_{\text{tors}}$. Es gilt $ax = 0$ für einen Nicht-Nullteiler $a \in R$. Es folgt

$$a(rx) = r(ax) = r \cdot 0 = 0,$$

  somit $rx \in M_{\text{tors}}$.

(c) Für $x \in M$ bezeichne $[x]$ die Restklasse von $x$ in $M/M_{\text{tors}}$. Sei $[x] \in M/M_{\text{tors}}$ ein Torsionselement. Dann existiert ein Nicht-Nullteiler $a \in R$ mit $a[x] = 0$. Das heißt $ax \in M_{\text{tors}}$, somit existiert ein Nicht-Nullteiler $b \in R$ mit $bax = 0$. Gemäß (a) ist auch $ba$ ein Nicht-Nullteiler, somit folgt $x \in M_{\text{tors}}$ und $[x] = 0$.

**Aufgabe 23.** (5 = 2+3 Punkte)

(a) Sei $K$ ein Körper, $r \geq 1$ und $P(X) \in K[X]$ ein normiertes nicht-konstantes Polynom. Zeigen Sie: Das Minimalpolynom des Jordankästchens $J_r(P)$ ist $P(X)^r$.

(b) Sei $K$ ein Körper, $s \in \mathbb{N}_0$, $r_1, \ldots, r_s \geq 1$ und $P_1, \ldots, P_s \in K[X]$ irreduzible normierte Polynome. Sei $A$ die Matrix in Jordan-Normalform

$$A := \begin{pmatrix} \boxed{J_{r_1}(P_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_{r_s}(P_s)} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{s} P_i(X)^{r_i},$$
$$m_A(X) = \prod_{P} P(X)^{m_P},$$

wobei $P$ alle irreduziblen normierten Polynome durchläuft und

$$m_P := \max\{r_i \,;\, P_i = P,\, 1 \leq i \leq s\}$$

mit $m_P := 0$, falls $P \neq P_i$ für alle $i$.

**Lösungsskizze zu Aufgabe 23:**

(a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $J_r(P)$ die Darstellungsmatrix des Endomorphismus $X\cdot$ (Multiplikation mit $X$) auf dem $K$-Vektorraum $K[X]/(P(X)^r)$ bezüglich einer bestimmten Basis ist. Ist $f = \sum_i a_i X^i \in K[X]$ ein Polynom, dann ist $f(X\cdot)$ der Endomorphismus „Multiplikation mit $f(X)$“, denn es gilt $(X\cdot)^i(g) = X^i g$ ($i$-fache Multiplikation mit $X$ ist Multiplikation mit $X^i$) und somit

$$f(X\cdot)(g) = \sum_i a_i(X\cdot)^i(g) = \sum_i a_i X^i g = f(X)g.$$

Da $P(X)$ normiert ist, ist auch $P(X)^r$ normiert. Multiplikation mit $P(X)^r$ ist der Nullendomorphismus auf $K[X]/(P(X)^r)$, das heißt es gilt $P^r(X\cdot) = 0$. Ist umgekehrt $f \in K[X]$ mit $f(X\cdot) = 0$, dann ist Multiplikation mit $f(X)$ der Nullendomorphismus, insbesondere $f(X) = f(X) \cdot 1 \equiv 0 \bmod P(X)^r$, das heißt $P(X)^r \mid f(X)$. Damit ist $P(X)^r$ das Minimalpolynom des Endomorphismus $X\cdot$ und damit auch der Matrix $J_r(P)$.

(b) Das charakteristische Polynom berechnet sich multiplikativ für Blockdiagonalmatrizen:

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det\left(X\mathbf{1} - \begin{pmatrix} \boxed{J_{r_1}(P_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_{r_s}(P_s)} \end{pmatrix}\right) \\
&= \det \begin{pmatrix} \boxed{X\mathbf{1} - J_{r_1}(P_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{X\mathbf{1} - J_{r_s}(P_s)} \end{pmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{s} \det(X\mathbf{1} - J_{r_i}(P_i)) \\
&= \prod_{i=1}^{s} \chi_{J_{r_i}(P_i)}(X).
\end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom von $J_{r_i}(P_i)$ ist ein Vielfaches des Minimalpolynoms, also von $P_i(X)^{r_i}$ nach (a). Sein Grad ist die Dimension

$$\dim K[X]/(P_i(X)^{r_i}) = \deg(P_i(X)^{r_i}),$$

damit stimmt das charakteristische mit dem Minimalpolynom überein und es folgt

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{s} P_i(X)^{r_i}.$$

Sei $f \in K[X]$ ein Polynom. Dann gilt

$$f(A) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{f(J_{r_1}(P_1))} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{f(J_{r_s}(P_s))} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow f(J_{r_i}(P_i)) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, s \\ &\Leftrightarrow P_i(X)^{r_i} \mid f(X) \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, s \qquad \text{(nach (a))} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{kgV}(P_1^{r_1}, \dots, P_s^{r_s}) \mid f. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$m_A(X) = \operatorname{kgV}(P_1^{r_1}, \dots, P_s^{r_s}).$$

Das kgV einer Menge von Polynomen hat die Primfaktorzerlegung

$$m_A(X) = \prod_P P(X)^{m_P},$$

wobei $m_P$ der maximale Exponent von $P$ in den Primfaktorzerlegungen der $P_i^{r_i}$ ist. Da die $P_i$ selbst irreduzibel sind, folgt

$$m_P = \max\{r_i \; ; \; P_i = P, \, 1 \le i \le s\},$$

wie behauptet.

**Aufgabe 24.** (4 = 2+2 Punkte)

(a) Sei $R$ ein Ring, $M$ ein $R$-Modul, $n \in \mathbb{N}_0$ und $f : M \twoheadrightarrow R^n$ ein surjektiver Modulhomomorphismus. Zeigen Sie: Es gibt einen Untermodul $N \subseteq M$, so dass die innere Summenzerlegung $M = \ker(f) \oplus N$ gilt.

(b) Sei $f : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $f(x) = x \pmod 2$. Zeigen Sie, dass es keinen $\mathbb{Z}$-Untermodul $N$ von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ gibt, so dass $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \ker(f) \oplus N$ gilt.

**Lösungsskizze zu Aufgabe 24:**

(a) Seien $e_1, \dots, e_n \in R^n$ die Standardbasisvektoren. Aufgrund der Surjektivität hat jedes $e_i$ ein Urbild $m_i$ in $M$. Sei $N \coloneqq \langle m_1, \dots m_n \rangle_R \subseteq M$. Wir behaupten, dass $M = \ker(f) \oplus N$ gilt. Sei $x \in M$ beliebig, dann ist $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ für gewisse $a_i \in R$. Es gilt

$$f(x - \sum_{i=1}^n a_i m_i) = f(x) - \sum_{i=1}^n a_i e_i = 0,$$

also $x - \sum_{i=1}^n a_i m_i \in \ker(f)$ und somit $x \in \ker(f) + N$. Um zu sehen, dass die Summe direkt ist, sei $x \in \ker(f) \cap N$. Wir schreiben $x = \sum a_i m_i$ mit $a_i \in R$, dann ist

$$0 = f(x) = \sum_i a_i f(m_i) = \sum_i a_i e_i.$$

Daraus folgt $a_i = 0$ für alle $i$ und somit $x = 0$.

(b) Da $\mathbb{Z}$-Moduln das gleiche wie abelsche Gruppen sind, ist ein $\mathbb{Z}$-Untermodul von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ einfach eine Untergruppe. Die Untergruppen entsprechen den Teilern von 4 und sind durch $0, 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ gegeben. Es gilt $\ker(f) = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Die Bedingung $N \cap \ker(f) = 0$ gilt nur für $N = 0$, aber es ist $0 + \ker(f) = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, eine echte Teilmenge.

---

**Abgabe:** Am kommenden Dienstag, den **9. Juli 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6–8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/76786679/Grundlagen_der_Algebra`

---