Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Theresa Kumpitsch

Algebra

Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 1 WS 2019/20

Aufgabe 1. (Irreduzibel oder reduzibel – das ist hier die Frage!, 6 = 2+2+2 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die Polynome

(a) $T^2 + T + 1$,
(b) $T^4 - 5$,
(c) $T^4 + 4$

irreduzibel in $K[T]$ sind für $K = \mathbb{Q}, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5$.

Aufgabe 2. (Irreduzibilität und Grad, 4+1+1 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $f \in K[T]$.

(a) Sei $\deg(f) \geq 2$. Zeigen Sie: Ist f irreduzibel, so hat f keine Nullstelle. Die Umkehrung gilt, wenn $\deg(f) \leq 3$.
(b) Finden Sie einen Körper K und ein Polynom $f \in K[T]$ vom Grad 4, für das die Umkehrung im Teil (a) nicht gilt.
(c) Was kann man über die Primfaktorzerlegung von f in den Fällen $\deg(f) = 0$ und $\deg(f) = 1$ sagen?

Aufgabe 3. (Rechnen in Faktorringen, 3+3 Punkte)

(a) Sei $R = \mathbb{Q}[T]/(T^2 - 1)$ und bezeichne t das Bild von T in R.
  (i) Schreiben Sie das Produkt von $f = t + 1$ und $g = 2t - 3$ in der Form $at + b$ für $a, b \in \mathbb{Q}$.
  (ii) Machen Sie das Gleiche wie in (a)(i) für die Polynome $f = t - 1$ und $g = t + 1$. Ist R ein Körper?
  (iii) Zeigen Sie, dass R isomorph zu $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ist.
(b) Betrachten Sie die Polynome $f = T^3 + 2T + 2, g = T + 1 \in \mathbb{Q}[T]$. Bezeichne t das Bild von T im Ring $R = \mathbb{Q}[T]/(f)$.
  (i) Finden Sie $u, v \in \mathbb{Q}[T]$ mit $uf + vg = 1$
  (ii) Finden Sie ein multiplikatives Inverses von $(t + 1)$ in R und schreiben Sie es in der Form $h(t)$ für ein $h \in \mathbb{Q}[T]$ mit $\deg(h) \leq 2$.
  (iii) Machen Sie das Gleiche wie in (b)(ii) für $(t^2 + 1)$.

Aufgabe 4. ($\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ als Faktorring, 1+1+2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Es gibt eindeutig bestimmte Ringhomomorphismen

$$\varphi, \psi : \mathbb{Q}[T] \to \mathbb{C}$$

mit $\varphi(a) = \psi(a) = a$ für alle $a \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$ und $\varphi(T) = \sqrt{2}$, $\psi(T) = -\sqrt{2}$, wobei $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ die positive Quadratwurzel von 2 bezeichnet.

(b) Finden Sie ein normiertes Polynom $P \in \mathbb{Q}[T]$, welches das Ideal $\ker(\varphi)$ erzeugt.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{im}(\psi) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C},$$

und folgern Sie mithilfe des Homomorphiesatzes, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ein Körper ist.

(d) Zeigen Sie: Ist $\sigma : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ein Körperautomorphismus, so ist

$$\sigma(\sqrt{2}) \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}.$$

In beiden Fällen gibt es jeweils genau einen solchen Automorphismus.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $\sigma(a) = a$ für alle $a \in \mathbb{Q}$ gilt.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den **24.10.2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/81425887/Algebra`
