Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Theresa Kumpitsch

Algebra

Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 2 WS 2019/20

Aufgabe 1. (K-Algebra-Automorphismen von $K[T]$, 4 = 1 + 3 Punkte)

Sei K ein Körper.

(a) Seien $a, b \in K$ und $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass der K-Algebra-Endomorphismus $\varphi\colon K[T] \to K[T]$ gegeben durch $\varphi(T) = aT + b$ ein Automorphismus von $K[T]$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass alle K-Algebra-Automorphismen von $K[T]$ von der in (a) beschriebenen Form sind.

Aufgabe 2. (Beispiel Minimalpolynom, 6 Punkte)

Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ über jedem der folgenden Körper

$$\text{(a) } \mathbb{Q} \qquad \text{(b) } \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \qquad \text{(c) } \mathbb{Q}(\sqrt{15})$$

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

Aufgabe 3. (Algebraische Elemente, 4 Punkte)

In Korollar 3.30 wurde gezeigt, dass für zwei algebraische Elemente α, β in einer Körpererweiterung L/K gilt, dass auch die Elemente $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ algebraisch über K sind. Zeigen Sie, dass die Umkehrung auch gilt: Wenn $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ algebraische Elemente über K sind, so auch α und β.

Aufgabe 4. (Körpererweiterung als Vektorraum, 6 = 1 + 2 + 2 + 1 Punkte)

Gegeben sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \mathrm{i}) \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie den Grad $[K : \mathbb{Q}]$ sowie eine Basis von K als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

(b) Für $\alpha \in K$ definieren wir die $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung

$$m_\alpha : K \longrightarrow K, \quad x \longmapsto \alpha x.$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, dessen Nullstellen in $\mathbb{C}$, und das Minimalpolynom für $m_{\sqrt{2}}$ und $m_{\sqrt{2}+\mathrm{i}}$.

(c) Bestimmen Sie Minimalpolynome von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{2} + \mathrm{i}$ über $\mathbb{Q}$ gemäß Definition aus der Vorlesung. Vergleichen Sie sie mit Ihren Ergebnissen aus Teil (b).

(d) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2} + \mathrm{i}$ ein primitives Element der Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}$ ist, d.h. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \mathrm{i})$.

Aufgabe 5. (Endliche Körpererweiterungen und Gradsatz, $4 = 2 + 2$ Punkte)

(a) Sei L/K eine Körpererweiterung von Primzahlgrad. Zeigen Sie, dass $K(\alpha) = L$ für alle $\alpha \in L \setminus K$ gilt.

(b) Finden Sie eine Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$ vom Grad 4 und ein $\alpha \in L \setminus \mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q}(\alpha) \neq L$.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den **31.10.2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/81425887/Algebra`
