Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Theresa Kumpitsch

Algebra

Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 3 WS 2019/20

Aufgabe 1. (Erweiterungen von Grad 3 über $\mathbb{R}$, 6 Punkte)

Beweisen Sie:

(a) Es existiert keine Körpererweiterung $K/\mathbb{R}$ von Grad 3.

(b) Es existiert kein Schiefkörper $D/\mathbb{R}$, der als $\mathbb{R}$-Vektorraum Dimension 3 hat.
Bemerkung: Ein Schiefkörper über einem Körper K ist eine K-Algebra, die alle Eigenschaften eines Körpers hat, nur die Multiplikation ist nicht notwendigerweise kommutativ. Man beachte, dass aufgrund der K-Algebrastruktur die K-Skalare mit allen Elementen kommutieren. Im Skript wird der Schiefkörper $\mathbb{H}$ der Hamiltonschen Quaternionen erwähnt, bei welchem es sich um einen 4-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum handelt.

Aufgabe 2. (Zwischenerkörper, 4 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Körpererweitung $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$ besitzt nur endlich viele Zwischenkörper.

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{15})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ sind Zwischenkörper von $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$.

(c) Der Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ besitzt echte Teilkörper.

(d) Es gibt einen Teilkörper $K \subseteq \mathbb{C}$, der $\mathbb{Q}$ nicht als Teilkörper enthält.

Aufgabe 3. (Quadratische Erweiterungen I, 6 Punkte)

Sei K ein Körper mit $2 \in K^\times$ und sei L/K mit $[L : K] = 2$. Zeigen Sie:

(a) Die Körpererweiterung L/K kann von einem Element $\alpha \in L$ erzeugt werden, welches über K das Minimalpolynom $T^2 - a$ mit einem $a \in K^\times$ hat.

(b) Die Menge aller $a \in K^\times$, zu denen es ein $\alpha \in L$ gibt mit Minimalpolynom von α über K der Form $T^2 - a$, ist eine Nebenklasse der multiplikativen Gruppe $K^\times$ bezüglich des Normalteilers der Quadrate $(K^\times)^2$.

(c) In $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$ gibt es keine Lösung für die Gleichung $T^2 = 19$.

(d) Bestimmen Sie die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}_K(L)$ der Körperautomorphismen $\varphi : L \to L$ mit $\varphi|_K = \mathrm{id}_K$.

Aufgabe 4. (Reguläre n-Ecke, 8 Punkte)

(a) Konstruieren Sie ein reguläres 15-Eck!

(b) Sei n eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass wenn das reguläre n-Eck konstruierbar ist, so auch das reguläre $2n$-Eck.

(c) Seien p und q teilerfremde natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass wenn das reguläre p-Eck und das reguläre q-Eck konstruierbar sind, so auch das reguläre pq-Eck.

(d) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha = \cos \frac{2\pi}{9}$ über $\mathbb{Q}$ und folgern Sie, dass die Konstruktion des regelmäßigen 9-Ecks mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist.

(e) Ohne Beweis dürfen Sie annehmen, dass $\alpha = 2\cos \frac{2\pi}{7}$ Nullstelle des Polynoms

$$T^3 + T^2 - 2T - 1 \in \mathbb{Q}[T]$$

ist. Folgern Sie, dass das reguläre 7-Eck nicht konstruierbar ist.

Bemerkung: Diese Aufgabe ist eine kleine Vorschau auf einen Satz, der später in der Vorlesung bewiesen werden wird: Ein reguläres n-Eck genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn

$$n = 2^k p_1 \cdot \ldots \cdot p_r,$$

wobei $k \geq 0$ und $p_1, \ldots, p_r$ paarweise verschiedene Primzahlen der Form $p = 2^{2^m} + 1$, sogenannte *Fermat-Primzahlen*, sind. Die einzigen bisher bekannten Fermat-Primzahlen ergeben sich für $m = 0, 1, 2, 3, 4$ und es sind $p = 3, 5, 17, 257, 65537$.

***Aufgabe 5.** (Transzendenz von e)

In dieser Zusatzaufgabe wollen wir einen Satz von Hermite aus dem Jahr 1873 nachvollziehen: Die Eulersche Zahl e ist transzendent. Dies zeigen wir per Widerspruchsbeweis. Angenommen e ist algebraisch, d.h. es gibt $a_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, n$ mit $a_0 \neq 0$ sodass

$$a_n e^n + \ldots + a_1 e + a_0 = 0 \tag{1}$$

Wir wählen eine Zerlegung

$$e^k = \frac{M_k + \varepsilon_k}{M}, \quad \text{für } k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Setze $M =: M_0$. Damit lässt sich (1) umschreiben zu

$$\underbrace{a_n M_n + a_{n-1} M_{n-1} + \ldots + a_0 M_0}_{=:L} = -\underbrace{(a_n \varepsilon_n + \ldots + a_1 \varepsilon_1)}_{=:R}. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass für eine ganze Zahl $p \geq 1$ mit

$$M_k = e^k \int_k^\infty \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}[(x-1) \cdot \ldots \cdot (x-n)]^p e^{-x} dx$$
$$\varepsilon_k = e^k \int_0^k \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}[(x-1) \cdot \ldots \cdot (x-n)]^p e^{-x} dx$$

(2) gilt.

Kern dieses Beweis ist es, die Gleichung (3) zum Widerspruch zu führen, indem wir zeigen, dass für eine geeignete Wahl von p sowohl $L \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ als auch $|R| < 1$ gilt. Dazu eine Anleitung:

(L) Zuerst widmen wir uns der linken Seite von (3).

($k = 0$) • Zeigen Sie, dass man M schreiben kann als

$$M = \sum_{i=0}^{np} \frac{1}{(p-1)!} C_i \int_0^\infty x^{p-1+i} e^{-x} dx = \sum_{i=0}^{np} C_i \frac{(p+i-1)!}{(p-1)!}, \quad \text{für } C_i \in \mathbb{Z}.$$

Zur Erinnerung: Die Gamma-Funktion ist für $x > 0$ definiert als $\Gamma(x) \coloneqq \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ und für jede natürliche Zahl n gilt $\Gamma(n+1) = n!$.

• Folgern Sie, dass $M \in \mathbb{Z}$ und und für geeignetes p auch $p \nmid M$.
Tipp: Betrachten Sie den Summanden $i = 0$ und zeigen Sie, dass man p passend wählen kann, sodass p kein Teiler ist. Zeigen Sie dann, dass p alle anderen Summanden teilt.

($k \geq 1$) Substituieren Sie $u \coloneqq x - k$ in der Integraldarstellung von M_k und zeigen Sie, dass

$$M_k = \sum_{j=1}^{np} \frac{1}{(p-1)!} D_j \int_0^\infty u^{p+j-1} e^{-u} du = \sum_{j=1}^{np} D_j \frac{(p+j-1)!}{(p-1)!} \quad \text{für } D_j \in \mathbb{Z}.$$

Folgern Sie, dass M_k eine ganze Zahl ist und für geeignetes p gilt $p \mid M_k$.

Nutzen Sie dies um zu folgern, dass $L \neq 0$.

(R) Es muss nur noch die rechte Seite von (3) diskutiert werden. Sei hierzu $X \coloneqq \max\{|(x-1) \cdot \ldots \cdot (x-n)| \mid x \in [0, n]\}$. Zeigen Sie, dass

$$| \varepsilon_k | \leq e^n \frac{(nX)^p}{(p-1)!}.$$

Folgern Sie damit, dass für geeignetes p die Abschätzung $|R| < 1$ gilt.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den **07.11.2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/81425887/Algebra`