Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Theresa Kumpitsch

Algebra

Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 4 WS 2019/20

Aufgabe 1. (Automorphismen von $k(x)/k$, 8 Punkte)

(a) Sei k ein Körper. Betrachten Sie den rationalen Funktionenkörper $k(x)$ und sei $t = \frac{P(x)}{Q(x)} \in k(x)$, wobei $P, Q \in k[x]$ teilerfremde Polynome seien, $Q \neq 0$ gelte und nicht beide Polynome konstant seien.

 (i) Zeigen Sie, dass t transzendent über k ist.

 (ii) Zeigen Sie, dass
$$[k(x) : k(t)] = \max\{\deg P, \deg Q\}.$$

 Tipp: Finden Sie ein Minimalpolynom von x über $k(t)$. Für die Prüfung der Irreduzibilität hilft das Gauß-Lemma.

(b) Zeigen Sie, dass k-Algebra-Endomorphismen $\phi\colon k(x) \to k(x)$ bestimmt sind durch das Bild von x, d.h. festgelegt sind durch $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ für P, Q wie in (a).
Tipp: Nutzen Sie die universelle Eigenschaft des Quotientenkörpers.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\phi\colon k(x) \to k(x), \quad x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ wobei } ad - bc \neq 0,$$

ein k-Algebra-Automorphismus ist.

(d) Zeigen Sie, dass alle k-Algebra-Automorphismen von $k(x)$ von der in (c) beschriebenen Form sind.
Tipp: Nutzen Sie (a) (ii) und (b).

(e) Die obigen Überlegungen geben uns eine Abbildung

$$\lambda\colon \mathrm{GL}_2(k) \to \mathrm{Aut}_k(k(x))$$

gegeben durch
$$\lambda(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Zeigen Sie, dass dies einen Isomorphismus zwischen $\mathrm{Aut}_k(k(x))$ und der projektiven linearen Gruppe

$$\mathrm{PGL}_2(k) := \mathrm{GL}_2(k)/\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}; a \in k^\times\right\}$$

induziert.

Aufgabe 2. (Diskrete Bewertungen, 6 Punkte)

Sei R ein Ring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung, also beispielsweise ein Hauptidealring. Sei $\pi \in R$ ein Primelement und $K = \mathrm{Quot}(R)$.

(a) Zeigen Sie, dass sich jedes Element $x \in K^\times$ eindeutig schreiben lässt als

$$x = \pi^n \frac{y}{z},$$

wobei $n \in \mathbb{Z}$, $y, z \in R \setminus \{0\}$ teilerfremd und π kein Teiler von y und z sei.

(b) Zeigen Sie, dass

$$v_\pi \colon K^\times \to \mathbb{Z}, \quad v_\pi(\pi^n \frac{y}{z}) = n \quad (\pi \nmid yz)$$

eine diskrete Bewertung von $K^\times$ definiert.

(c) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal [1] in R. Zeigen Sie, dass $R \setminus \mathfrak{p} \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R ist. Wir definieren den *lokalen Ring bei* $\mathfrak{p}$ als

$$R_\mathfrak{p} = (R \setminus \mathfrak{p})^{-1} R.$$

Man bezeichne mit $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ das vom Bild von $\mathfrak{p}$ erzeugte Ideal in $R_\mathfrak{p}$ unter der Lokalisierungsabbildung $i \colon R \to R_\mathfrak{p}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ das eindeutige maximale Ideal in $R_\mathfrak{p}$ ist und geben Sie die Einheitengruppe $R_\mathfrak{p}^\times$ an.

(d) Zeigen Sie, dass der Bewertungsring der Bewertung v_π gleich dem lokalen Ring von R bei $\mathfrak{p} = (\pi)$ ist.

Aufgabe 3. (Irreduzibilitätskriterien, 8 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[T]$ irreduzibel sind:
   (1) $3T^5 + 14T^3 - 21T^2 + 49T - 7$,
   (2) $T^{1002} + 27T + 1002$,
   (3) $T^4 + 1$.

(b) Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und $f \in \mathbb{Z}[T]$ ein Polynom von Grad $2n+1$ der Form

$$f(T) = \sum_{i=0}^{2n+1} a_i T^i, \quad a_{2n+1} \neq 0.$$

Angenommen

- $p \nmid a_{2n+1}$, aber $p \mid a_i$ für alle $i \leq 2n$ und
- $p^2 \mid a_i$ für alle $i \leq n$, aber $p^3 \nmid a_0$.

Man zeige, dass ein solches f irreduzibel in $\mathbb{Q}[T]$ ist.

(c) Sei $f = T^4 + a_3T^3 + a_2T^2 + a_1T + a_0 \in \mathbb{Z}[T]$. Seien a_3, a_0 ungerade und a_1, a_2 entweder beide gerade oder beide ungerade. Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den **14.11.2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/81425887/Algebra`

---

[1] Ein Primideal $\mathfrak{p}$ in einem Ring R ist ein echtes Ideal von R mit der Eigenschaft, dass für alle $x, y \in \mathfrak{p}$ mit $xy \in \mathfrak{p}$ bereits $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass der Faktorring $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsring ist. Ist π ein Primelement in R, so ist das davon in R erzeugte Ideal (π) ein Primideal.