Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Theresa Kumpitsch

Algebra

Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 5 WS 2019/20

Aufgabe 1. (Körpereinbettungen)

Es sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie den Grad $[K : \mathbb{Q}]$.

(b) Beschreiben Sie alle $\mathbb{Q}$-Homomorphismen in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C})$.
Welche dieser Homomorphismen haben dasselbe Bild in $\mathbb{C}$?

(c) Bestimmen Sie alle möglichen Bilder von $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ unter einem beliebigen $\mathbb{Q}$-Homomorphismus $K \to \mathbb{C}$.

(d) Zeigen Sie, dass α ein primitives Element der Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}$ ist. Was ist das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 2. (Zerfällungskörper)

(a) Bestimmen Sie für die folgenden Polynome aus $\mathbb{Q}[T]$ jeweils den Zerfällungskörper über $\mathbb{Q}$ als Unterkörper von $\mathbb{C}$ sowie den Grad des Zerfällungskörpers über $\mathbb{Q}$

(i) $T^2 + 1$, (ii) $T^4 + 4$, (iii) $T^4 + 8$, (iv) $T^4 - 2$, (v) $(T^2 + 1)(T^3 - 2)$.

(b) Es sei L ein Zerfällungskörper des Polynoms f über dem Körper K. Setze $n := \deg f$. Zeigen Sie:

(i) $[L : K]$ ist ein Teiler von $n!$
Tipp: Induktion nach n. Für den Induktionsschritt betrachten Sie einerseits den Zerfällungskörper eines irreduziblen Faktors und andererseits den von einer Nullstelle erzeugten Zwischenkörper.

(ii) Aus $[L : K] = n!$ folgt, dass f irreduzibel ist.

(iii) Geben Sie für ein $n \geq 3$ ein Beispiel für L/K an, in dem $[L : K] = n!$ gilt.

(iv) Geben Sie ein Beispiel für L/K an, in dem $n < [L : K] < n!$ gilt.

Aufgabe 3. (Algebraischer Abschluss)

Sei K ein Körper.

(a) Bezeichne $\overline{\mathbb{Q}}$ den relativen algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\overline{\mathbb{Q}}$ über $\mathbb{Q}$ eine unendliche algebraische Erweiterung ist.

Tipp: Überlegen Sie sich zuerst, dass es generell unendliche algebraische Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ gibt. Betrachten Sie hierzu beispielsweise Polynome der Form $T^n - 2 \in \mathbb{Q}[T]$ mit $n \geq 1$.

(b) Zeigen Sie, dass wenn K abzählbar ist, $\overline{K}$ ebenfalls abzählbar ist.

Tipp: Sie dürfen verwenden, dass jede abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass wenn K endlich ist, $\overline{K}/K$ eine unendliche algebraische Körpererweiterung ist.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass ein endlicher Körper nie algebraisch abgeschlossen sein kann. Euklid!

*(d) Existieren algebraische Abschlüsse Ω_1 und Ω_2 eines Körpers K derart, dass Ω_2 zu einem echten Teilkörper von Ω_1 isomorph ist?

Tipp: Überlegen Sie sich zuerst, dass der fragliche Isomorphismus kein K-Algebra-Homomorphismus sein kann.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den **21.11.2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/81425887/Algebra`
