Goethe-Universität Frankfurt | Prof. Dr. Jakob Stix
Institut für Mathematik | Theresa Kumpitsch

Algebra

Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 6 WS 2019/20

Aufgabe 1. (Quadratische Erweiterungen II)

Sei nun K ein Körper der Charakteristik 2. Sei L/K eine quadratische Körpererweiterung.

(a) Zeigen Sie, dass L/K von einem Element $\alpha \in L$ erzeugt werden kann, welches über K entweder (i) das Minimalpolynom $X^2 - a$ mit einem $a \in K$ oder (s) das Minimalpolynom $X^2 + X + b$ mit einem $b \in K$ hat.

(b) Finden Sie jeweils ein Beispiel für die Fälle (i) und (s) aus Teil (a).

(c) Bestimmen Sie die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}_K(L)$ der Körperautomorphismen $\varphi : L \to L$ mit $\varphi|_K = \mathrm{id}_K$.

Tipp: Betrachten Sie $\alpha \mapsto \alpha + 1$ in einem der beiden Fälle.

(d) Schließen Sie aus (c), dass in L/K nicht sowohl Elemente mit Minimalpolynom vom Typ (i) als auch vom Typ (s) vorkommen.

Aufgabe 2. (Artin-Schreier-Erweiterungen in Charakteristik p)

Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und $\overline{K}$ sein algebraischer Abschluss. Ferner sei $a \in K$, $f(T) := T^p - T - a \in K[T]$ und α eine Nullstelle von f in $\overline{K}$. Zeigen Sie:

(a) Das Polynom f ist separabel und für jedes $c \in \mathbb{F}_p$ ist $\alpha + c$ eine Nullstelle von f in $\overline{K}$.

(b) Das Minimalpolynom von jedem Element $\alpha + c$ (wie in (a)) hat den gleichen Grad.

(c) Das Polynom f ist genau dann irreduzibel, wenn es keine Nullstelle in K hat.

(d) $K(\alpha)/K$ ist eine normale Körpererweiterung.

(e) Bestimmen Sie die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}_K(K(\alpha))$, falls f irreduzibel ist.

Aufgabe 3. (Separabilität)

Sei E/K eine Körpererweiterung der Charakteristik $p > 0$ und $\alpha \in E$. Zeigen Sie:

$$K(\alpha) = K(\alpha^p) \iff \alpha \text{ ist algebraisch und separabel über } K.$$

Aufgabe 4. (Inseparable Körpererweiterung)

Sei F ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Ferner sei $L := F(X, Y)$ der rationale Funktionenkörper in zwei Unbestimmten X, Y und $K := F(X^p, Y^p) \subseteq L$. Zeigen Sie:

(a) L/K ist eine rein inseparable Körpererweiterung von Grad p^2.

(b) L/K ist nicht einfach.

(c) Geben Sie unendlich viele Zwischenkörper von L/K an.

Aufgabe 5. (Endliche Körper)

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_3[T]/(T^2+1)$ und $\mathbb{F}_3[T]/(T^2+T-1)$ als Algebren über $\mathbb{F}_3$ isomorph sind. Geben Sie dazu einen Isomorphismus explizit an.

(b) Finden Sie einen Erzeuger von $\mathbb{F}_9^\times$ sowie ein Element von $\mathbb{F}_9$, der ein primitives Element für die Körpererweiterung $\mathbb{F}_9/\mathbb{F}_3$, aber kein Erzeuger von $\mathbb{F}_9^\times$ ist.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den **28.11.2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/81425887/Algebra`
