Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Theresa Kumpitsch

Algebra

Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 6 WS 2019/20

Aufgabe 1. (Reduktion modulo Primzahl)

Zeigen Sie:

(a) Ist q eine *ungerade* Primzahlpotenz, so ist das Produkt zweier Nicht-Quadrate in $\mathbb{F}_q^\times$ ein Quadrat in $\mathbb{F}_q^\times$.

(b) Ist p eine beliebige Primzahl, so ist $T^4 + 1 \in \mathbb{F}_p[T]$ ein Produkt von zwei (nicht notwendigerweise irreduziblen) Polynomen über $\mathbb{F}_p$ vom Grad 2.

Tipp: Überlegen Sie sich für $p > 2$ zunächst, dass mindestens ein $x \in \{-1, 2, -2\}$ ein Quadrat in $\mathbb{F}_p^\times$ sein muss. Unterscheiden Sie dann drei Fälle.

(c) Das Polynom $T^4 + 1$ ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2. (Frobenius)

Geben Sie einen unendlichen Körper K mit Charakteristik $p > 0$ an, so dass der Frobenius-Homomorphismus $x \mapsto x^p$

(a) injektiv, aber nicht surjektiv ist;

(b) ein Automorphismus von K ist.

Aufgabe 3. (Zählen irreduzibler normierter Polynome mod p)

Sei p eine Primzahl und q eine Potenz von p.

(a) Zeigen Sie, dass ein irreduzibles Polynom $P \in \mathbb{F}_q[T]$ genau dann ein Teiler von $T^{q^n} - T$ ist, wenn $\deg P$ ein Teiler von n ist.

(b) Bezeichne nun $I_q(d)$ die Menge der irreduziblen normierten Polynome in $\mathbb{F}_q[T]$ vom Grad d.

(i) Zeigen Sie, dass gilt

$$T^{q^n} - T = \prod_{d|n} \left(\prod_{P \in I_q(d)} P \right).$$

(ii) Folgern Sie daraus die Rekursionsformel

$$q^n = \sum_{d|n} |I_q(d)| d \tag{1}$$

und berechnen Sie damit $|I_q(1)|, |I_q(2)|$ und $|I_q(3)|$.

(iii) Leiten Sie aus (1) her, dass $|I_q(d)| > 0$.

Aufgabe 4. (Derivationen)

Sei K ein Körper. Aus Beispiel 3.6 (2) der Vorlesungen kennen Sie die K-Algebra $K[\varepsilon]$, die als K-Vektorraum die Basis $1, \varepsilon$ hat und dessen Multiplikation durch $\varepsilon^2 = 0$ erklärt ist. Zeigen Sie

$$\{\partial\colon K \to K \mid \partial \text{ Derivation}\} = \{f\colon K \to K[\varepsilon] \mid f \equiv \mathrm{id} \mod \varepsilon\}\,.$$

Aufgabe 5. (Beispiele galoisscher Erweiterungen)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Körpererweiterungen L/K galoissch sind:

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$; (b) $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})/\mathbb{Q}$; (c) $\mathbb{F}_{81}/\mathbb{F}_9$;
(d) $\mathbb{Q}(t)/\mathbb{Q}(t^2)$; (e) $\mathbb{F}_p(t)/\mathbb{F}_p(t^p)$.

Aufgabe 6. (Galoiserweiterungen)

Zeigen Sie: Ist L/K eine endliche normale Körpererweiterung und $G := \mathrm{Aut}_K(L)$, so ist die Körpererweiterung L/L^G ist galoissch und

$$[L : L^G] = [L : K]_s.$$

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den **05.12.2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/81425887/Algebra`
