Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Theresa Kumpitsch

Algebra

Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 8 WS 2019/20

Aufgabe 1. (Galoiskorrespondenz)

Sei L/K eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ und $\alpha \in L$ ein Element mit $\sigma(\alpha) \neq \alpha$ für alle $\sigma \in G$ mit $\sigma \neq \mathrm{id}$. Zeigen Sie, dass $L = K(\alpha)$.

Aufgabe 2. (Primitive Elemente)

(a) Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und $K(\alpha, \beta)/K$ eine endliche Erweiterung, sodass $K(\alpha)/K$ und $K(\beta)/K$ beide galoissch sind und $K(\alpha) \cap K(\beta) = K$. Dann gilt $K(\alpha, \beta) = K(\alpha + \beta)$.

Tipp: Es reicht zu zeigen, dass $H \coloneqq \mathrm{Gal}(K(\alpha, \beta)/K(\alpha+\beta))$ trivial ist. Sei $\sigma \in H$. Überlegen Sie sich zuerst, dass ein $s \in K$ existiert, dass $\sigma(\alpha) = \alpha+s$ und betrachten Sie dann $\sigma^k(\alpha)$ für ein hinreichend großes k, um zu folgern, dass $s = 0$.

(b) Finden Sie ein Beispiel für diesen Satz. Finden Sie ferner ein Beispiel, in dem $K(\alpha, \beta) \neq K(\alpha + \beta)$ gilt.

Bemerkung: Aus dem Beweis des Satzes vom primitiven Element ist bekannt, dass wenn α, β separable Elemente über einem Körper K sind, so gilt $K(\alpha, \beta) = K(\alpha + t\beta)$ für unendlich viele $t \in K$. Hier sehen wir also eine Bedingung, unter der man $t = 1$ wählen kann.

Aufgabe 3. (Abelsche Galoisgruppen und primitive Elemente)

Es sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom. Bezeichne mit L einen Zerfällungskörper von f über K .

(a) Zeigen Sie, dass wenn $\mathrm{Gal}(L/K)$ abelsch ist und $\alpha \in L$ eine beliebige Nullstelle von f, so gilt $L = K(\alpha)$ und damit $[L : K] = \deg(f)$.

Tipp: Man beachte, dass alle Untergruppen von $\mathrm{Gal}(L/K)$ Normalteiler sind.

(b) Ist die unter (a) gemachte Aussage auch ohne die Voraussetzung über die Galoisgruppe richtig? Ist dies nicht der Fall, belege man dies durch ein Beispiel. Begründen Sie Ihre Antworten!

Aufgabe 4. (Nicht-abelsche Galoisgruppen)

Es sei $f := T^6 + 3 \in \mathbb{Q}[T]$ und $\zeta := \mathrm{e}^{\frac{\pi\,\mathrm{i}}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass $L := \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}\,\mathrm{i}) \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ ist, und bestimmen Sie $[L : \mathbb{Q}]$.

(b) Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ gegeben durch $\sigma(\sqrt[6]{3}\,\mathrm{i}) = \zeta \cdot \sqrt[6]{3}\,\mathrm{i}$ (warum existiert genau ein solches σ?). Beschreiben Sie σ als Permutation der Nullstellen von f in L.

Tipp: Bestimmen Sie zunächst $\sigma(\zeta)$.

(c) Bestimmen Sie die Struktur der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ nicht abelsch ist.

(d) Geben Sie das Untergruppendiagramm von $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ sowie das entsprechende Zwischenkörperdiagramm an.

Aufgabe 5. (Verschiebungssatz)

Sei Ω/K eine Körpererweiterung, L/K ein endlicher Zwischenkörper und E ein weiterer beliebiger Zwischenkörper. Ferner sei $F := EL$ das Kompositum von E und L in Ω.

(a) Zeigen Sie unter der Voraussetzung, dass L/K galoissch ist, folgende Aussagen:

(i) F/E ist ebenfalls endlich galoissch.

(ii) Die Einschränkung

$$\mathrm{res}_L^F : \mathrm{Gal}(F/E) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K), \quad \sigma \longmapsto \sigma|_L.$$

definiert einen injektiven Gruppenhomomorphismus. Was ist das Bild von res_L^F und der zugehörige Zwischenkörper?

(iii) $[F : E]$ ist ein Teiler von $[L : K]$.

(b) Finden Sie ein Gegenbeispiel zu (a)(iii), wenn L/K nicht galoissch ist.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den **12.12.2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/81425887/Algebra`
