Mathe für die Informatik I – WS 2019/20

Dr. Samuel Hetterich

Blatt 8 LA — Abgabe: Mo 19.12.2018, 10:15 Uhr

Hinweis:
▶ **Begründen Sie bitte alle Ihre Anworten! Unbegründete Anworten werden nicht bewertet. Rechnungen können Begründungen sein.**

Aufgabe 8.1 — 5 Punkte

a) Zeigen Sie, dass in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V der Dimension n jeweils n Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ genau dann eine Basis von v bilden, wenn Sie linear unabhängig sind.

b) Bilden die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

c) Bilden die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{Z}_3^3$?

d) Bilden die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{Z}_2^3$?

Hinweis: Die Vektoren aus Teilaufgabe b) sind in der gegebenen Form keine Spaltenvektoren des $\mathbb{Z}_3^3$ und des $\mathbb{Z}_2^3$. Dafür müssen die Einträge modulo gerechnet werden.

Aufgabe 8.2 — 4 Punkte

Es sei

$$\mathbb{R}[x]_3 := \{ax^3 + bx^2 + cx + d \ : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

die Menge der Polynome vom Grad höchstens 3. Bei dieser Menge handelt es sich um ein Vektorrraum. Es sei

$$K := \{p \in \mathbb{R}[x]_3 : \quad a = b = c = 0\}$$

die Menge der konstanten Polynome in $\mathbb{R}[x]_3$

a) Geben Sie eine Basis von $\mathbb{R}[x]_3$ an und beweisen Sie, dass es sich um eine Basis handelt. Welche Dimension hat $\mathbb{R}[x]_3$?

b) Zeigen Sie, dass die Menge K ein Untervektorraum vom $\mathbb{R}[x]_3$ ist.

c) Gegeben sind die Polynome $f(x) = 7$, $g(x) = -5x + 1$, $h(x) = 25x + 2$ und $k(x) = 8x^3 + 2x$. Ist die Menge $\mathcal{P} = \{f(x), g(x), h(x), k(x)\}$ linear unabhängig?

Aufgabe 8.3 — 4 Punkte

Es sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix $M(g) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 11 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
Außerdem bildet die Menge

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und die Menge

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von g bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, also die Matrix $M^{[\mathcal{AB}]}(g)$.

Aufgabe 8.4 — 3 Punkte

Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{Z}_3^{2\times 2}$ bilden.

Hinweis: Der Vektorraum $\mathbb{Z}_3^{2\times 2}$ hat die Dimension 4.