Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Theresa Kumpitsch

Algebra

Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 9 WS 2019/20

Aufgabe 1. (Galoisgruppen kubische Gleichungen)

Sei K ein Körper und $f(T) = T^3 + a_1T^2 + a_2T + a_3$ ein irreduzibles Polynom aus $K[T]$. Sei K_f/K der Zerfällungskörper von f über K.

(a) Zeigen Sie, dass der Zerfällungskörper K_f/K nur dann nicht galoissch ist, wenn die Charakteristik von K gleich 3 ist und gleichzeitig a_1 und a_2 verschwinden.

(b) Sei für den Rest der Aufgabe K_f/K galoissch. Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(f) = \mathrm{Gal}(K_f/K)$ entweder zyklisch von Ordnung 3 oder isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 auf drei Elementen ist.

(c) Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die drei Nullstellen von f in K_f. Sei $\delta \coloneqq (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1)$. Wir definieren $\Delta \coloneqq \delta^2$, genannt die *Diskriminante* von f. Zeigen Sie, dass Δ ein Element von K ist.

(d) Sei $\varphi : \mathrm{Gal}(f) \to S_3$ der Gruppenhomomorphismus, welcher die Gruppenoperationen von Automorphismen aus $\mathrm{Gal}(f)$ auf der Menge der Nullstellen von f beschreibt. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) Es gilt $\mathrm{Gal}(f) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(ii) Der Homomorphismus φ identifiziert $\mathrm{Gal}(f)$ mit der Gruppe der geraden Permutationen $A_3 \subset S_3$, dem Kern des Signum $\mathrm{sgn}\colon S_3 \to \{\pm 1\}$.

(iii) Es gilt $\delta \in K$.

(iv) Die Diskriminante Δ besitzt eine Quadratwurzel in K.

Bemerkung: Damit folgt zusammen mit (b), dass die Diskriminante eines kubischen Polynoms eindeutig dessen Galoisgruppe festlegt.

(e) Sei die Charakteristik des Körpers K von 3 verschieden. Überlegen Sie sich, dass man damm durch die Translation $T \mapsto T - \frac{1}{3}a_1$ das Polynom auf die Form $T^3 + aT + b$ normieren kann, ohne den Zerfällungskörper und die Galoisgruppe zu ändern. Weisen Sie die Formel $\Delta = -4a^3 - 27b^2$ nach.

Aufgabe 2. (Galoisgruppen biquadratische Gleichungen)

Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und $f = T^4 - 2aT^2 + b \in K[T]$ ein irreduzibles biquadratisches Polynom. Wir wollen die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(f)$ von f beschreiben. Zeigen Sie dazu die folgenden Aussagen.

(a) Ist b ein Quadrat in K, so gilt $\mathrm{Gal}(f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(b) Ist b kein Quadrat in K und $b(a^2 - b)$ ein Quadrat in K, so gilt $\mathrm{Gal}(f) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

(c) Ist weder b noch $b(a^2-b)$ ein Quadrat in K, dann ist $\mathrm{Gal}(f) = D_4$ (Diedergruppe).

Tipp: Schreiben Sie das Polynom f als $f = (T^2 - \alpha^2)(T^2 - \beta^2)$. Finden Sie ein Quadrat mit $A = \{\pm\alpha, \pm\beta\}$ als Eckenmenge, so dass $\mathrm{Gal}(f)$ durch Automorphismen des Quadrats auf der Eckenmenge operiert. Schließen Sie zunächst, dass nur die drei angegebenen Gruppen in Frage kommen. Schreiben Sie dann in $K(\alpha, \beta)$ Wurzeln von b und von $4(a^2 - b)$ hin. Analysieren Sie dann für jeden Automorphismus des obigen Quadrats, ob er diese Wurzeln fixiert oder mit -1 multipliziert. Die Bedingungen an b bzw. $b(a^2 - b)$ aus der Aufgabe schränken nun die Elemente von $\mathrm{Gal}(f)$ in der Automorphismengruppe des Quadrats ein.

Aufgabe 3. (Stabilisatoren)

Es operiere G auf einer Menge X und es sei $x \in X$. Begrüngen Sie, dass der Stabilisator $G_x = \mathrm{Stab}_G(x)$ genau dann ein Normalteiler von G ist, wenn $G_x = G_y$ für alle $y \in G.x$.

Aufgabe 4. (Operation auf irreduziblen Faktoren)

Sei L/K eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G und sei $f \in K[T]$ ein normiertes, separables und über K irreduzibles Polynom. Es sei $f = \prod_{i=1}^{s} f_i(T)$ die Zerlegung in irreduzible normierte Faktoren über L. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Gruppe G operiert transitiv auf der Menge $\{f_1(T), \ldots, f_s(T)\}$,

(b) Die Gruppen $G_i = \{\sigma \in G \mid \sigma f_i = f_i\}$ sind paarweise konjugiert in G.

(c) Die Faktoren $f_i(T) \in L[T]$ haben den gleichen Grad.

(d) Die Anzahl s ist ein Teiler des Grades $[L : K]$.

Aufgabe 5. (Einheitswurzeln in Körpern positiver Charakteristik)

Sei $K = \mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper der Charakteristik p und es sei n eine natürliche Zahl.

(a) Angenommen $p \nmid n$. Zeigen Sie, dass $K(\zeta_n) = \mathbb{F}_{q^r}$, wobei r die Ordnung von p in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ bezeichne und $K(\zeta_n)/K$ somit galoissch mit zyklischer Galoisgruppe ist.

(b) Was passiert für $n = p$?

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den **19.12.2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/81425887/Algebra`
