Mathe für die Informatik I – WS 2019/20
Dr. Samuel Hetterich

Blatt 9 LA — Abgabe: Mo 14.01.2019, 10:15 Uhr

Hinweis:

▶ **Begründen Sie bitte alle Ihre Anworten! Unbegründete Anworten werden nicht bewertet. Rechnungen können Begründungen sein.**

▶ Auf diesem Übungsblatt haben Sie die Möglichkeit Zusatzpunkte zu sammeln. Diese Zusatzpunkte sind eine Hilfe für Sie, möglichst viele Punkte zu sammeln. Sie werden Ihnen angerechnet, aber nicht auf die zu erreichende Gesamtpunktzahl dazugezählt.

Aufgabe 9.1 Orthogonalität und Basen **4 Punkte**

Es seien $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$

a) Sind diese Vektoren paarweise orthogonal?

b) Bilden die Menge der Vektoren $\{w_1, w_2, w_3\}$ eine Basis?

c) Wenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren auf die Vektoren w_1, w_2 und w_3 an um eine orthogonale Basis zu erhalten.

Aufgabe 9.2 Lineare Abbildungen **3 Punkte**

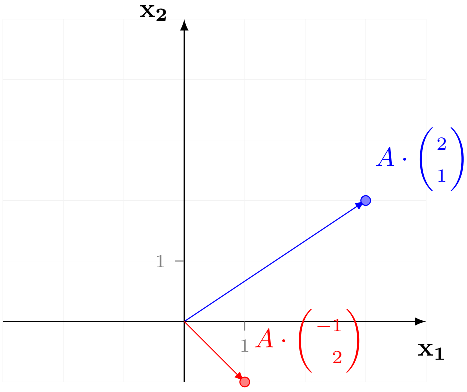

Fig. 1

Fig. 1 zeigt die Bilder der Vektoren $\binom{2}{1}$ und $\binom{-1}{2}$ unter der Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $x \mapsto A \cdot x$ (wobei A eine Matrix ist).

a) Rekonstruieren Sie die Matrix A.

b) Berechnen Sie das Bild von $\binom{-3}{7}$ unter f ein.

c) Beschreiben Sie, was die Abbildung f mit den Basisvektoren $e_1 = \binom{1}{0}$ und $e_2 = \binom{0}{1}$ im $\mathbb{R}^2$ macht.

Aufgabe 9.3 Dimensionsatz und Matrizen **4 Punkte**

Seien zwei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2e & 5 & 2\pi \\ -9 & 3e & \pi \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 16 & -68 \\ 3 & -12 & 51 \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei e die Eulersche Zahl ist. Bestimmen Sie die Dimensionen der Kerne und Bilder der Matrizen A und B.

Aufgabe 9.4 Lineare Abbildungen **4 Punkte + 2 Zusatzpunkte**

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Drehung um den Winkel 90° Grad mit dem Uhrzeigersinn. Geben Sie die Abbildungsmatrix M_f an.

b) Sei f eine lineare Abbildung, b ein Element des Bildraumes von f, sowie x eine Lösung der Gleichung $f(x) = b$. Finden Sie eine alternative Beschreibung der Menge aller y aus dem Definitionsbereich von f, für welche $f(x + y) = b$ gilt.

c) Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 14 & 7 \\ 3 & -22 & -5 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie den Kern von A. Welche Dimension hat das Bild von A?

Aufgabe 9.5 **6 Zusatzpunkte**

a) Sei $P = \{0, 1, x, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1\}$ eine Menge mit 8 Elementen. Zeigen Sie, dass die diese Mengen zusammen mit der Addition $\oplus_2$ aus $\mathbb{Z}_2$ ein abelsche Gruppe bildet, indem Sie die folgende Multiplikationstabelle ausfüllen und dann begründen.

b) Lösen Sie das folgende Kongruenzsystem.

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 4 \\ x &\equiv 4 \pmod 5 \\ x &\equiv 3 \pmod 7 \end{aligned}$$

Geben Sie sowohl die kleinste positive Lösung, als auch die Menge aller Lösungen an. Verwenden Sie den in der Vorlesung vorgestellten Lösungsalgorithmus.

c) Finden Sie alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(n) = 208$

Hinweis: Denke Sie bei Aufgabenteil a) bitte daran die Koeffizienten vor dem x und auftauchende Zahlen modulo 2 zu rechnen.

$\oplus_2$	0	1	x	$x+1$	x^2	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
0								
1								
x								
$x+1$								
x^2								
x^2+1								
x^2+x								
x^2+x+1								