Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Theresa Kumpitsch

Algebra

Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 10 WS 2019/20

Aufgabe 1. (Zwischenkörper von Kreisteilungskörpern über $\mathbb{Q}$)

(a) Sei $n \geq 3$ und $\zeta = \zeta_n$ eine primitive n-te Einheitswurzel.

  (i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})/\mathbb{Q}$ eine Teilererweiterung von $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ von Grad $\frac{1}{2}\varphi(n)$ ist, wobei φ die Euler'sche φ-Funktion bezeichne.

  (ii) Wir nennen eine Erweiterung K von $\mathbb{Q}$ *total reell*, wenn für alle Einbettungen $\tau\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$ gilt $\tau(K) \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})/\mathbb{Q}$ die maximale total reelle Zwischenerweiterung von $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ ist.

(b) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper von $\mathbb{Q}(\mu_n)/\mathbb{Q}$ für $n = 5, 7$.

Aufgabe 2. (Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$ und abelsche (Galois-)Gruppen)

(a) Seien $n, m \geq 1$ teilerfremd. Zeigen Sie:

  (i) Es gilt $\mathbb{Q}(\mu_{nm}) = \mathbb{Q}(\mu_n)\mathbb{Q}(\mu_m)$ und die natürlichen Projektionen definieren einen Isomorphismus

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{nm})/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_m)/\mathbb{Q}) \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_n)/\mathbb{Q}).$$

  (ii) Es gilt $\mathbb{Q}(\mu_m) \cap \mathbb{Q}(\mu_n) = \mathbb{Q}$, wobei wir beide als Teilkörper von $\mathbb{Q}(\mu_{mn})/\mathbb{Q}$ auffassen und den Schnitt dort bilden.

(b) Zeigen Sie, dass es zu jeder endlichen abelschen Gruppe A eine galoissche Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ gibt mit $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong A$. Zeigen Sie genauer, dass es davon (notwendigerweise abzählbar) unendlich viele paarweise linear disjunkte Körper $K_i/\mathbb{Q}$ gibt (d.h. für $i \neq j$ gilt $K_i \cap K_j = \mathbb{Q}$).

Tipp: Verwenden Sie den Struktursatz für endliche abelsche Gruppen, Teil (a) der Aufgabe sowie folgendes Resultat (welches nicht bewiesen werden muss):

Satz (Satz von Dirichlet, Spezialfall)**.** *Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es unendlich viele Primzahlen $p \equiv 1 \mod n$.*

Aufgabe 3. (p-Gruppen)

(a) Sei G eine Gruppe und sei $G/Z(G)$ zyklisch. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

(b) Folgern Sie: Hat G die Ordnung p^2, so ist G abelsch.

(c) Bestimmen Sie für eine Primzahl p alle Gruppen der Ordnung p^2 bis auf Isomorphie.

Aufgabe 4. (Sylowgruppen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$)

(a) Zeigen Sie, dass die Menge
$$U_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{F}_3 \right\}$$
eine 3-Sylowgruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ ist, und bestimmen Sie deren Normalisator in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge
$$U_2 := \left\{ A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3) \,\middle|\, AA^t = \pm \mathbf{1}_2 \right\}$$
eine 2-Sylowgruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ ist. Zeigen Sie ferner, dass U_2 kein Normalteiler von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ ist.

Tipp: Finden Sie für den zweiten Teil der Aufgaben eine Matrix, die nicht in U_2 liegt, dessen Jordannormalform jedoch in U_2 liegt.

(c) Bestimmen Sie zu jedem Primteiler p von $\#\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ die Anzahl $a_p(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3))$ der p-Sylowgruppen.

Aufgabe 5. (Anwendung der Sylowsätze)

(a) Sei ℓ eine Primzahl und sei G eine endliche Gruppe, für die gilt $v_\ell(\#G) = 1$. Wie viele Elemente der Ordnung ℓ gibt es in G?

(b) Seien nun p und ℓ verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung $p^2\ell$ eine Sylowgruppe besitzt, die ein Normalteiler ist.

—— **Schöne Feiertage!** ——

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den **16.01.2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/81425887/Algebra`
