Mathe für die Informatik I – WieSe 2019/20

Dr. Samuel Hetterich

Blatt 10 DM — Abgabe: Mo 20.01.2020, 10:15 Uhr

Hinweis:
▶ **Begründen Sie bitte alle Ihre Anworten! Unbegründete Anworten werden nicht bewertet. Rechnungen können Begründungen sein.**

Aufgabe 10.1 — **4 Punkte**

a) Berechnen Sie die 1-, 2-, 3- und ∞-Normen des Vektors $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}$.

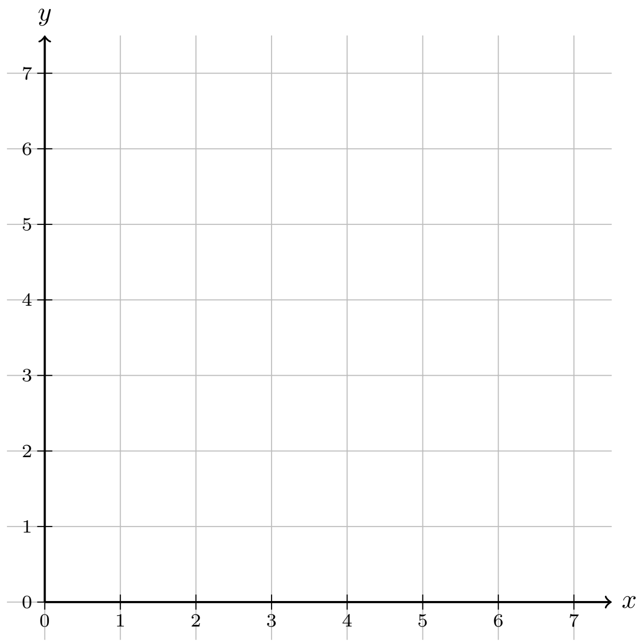
b) Nennen Sie den Hammingabstand der Tupel $(1,0,0,1,1,0,1,1,1)$ und $(1,0,1,1,0,1,1,1,0)$, also

$$\operatorname{dist}\left((1,0,0,1,1,0,1,1,1),(1,0,1,1,0,1,1,1,0)\right).$$

c) Berechnen Sie den Abstand der Vektoren v aus Aufgabenteil a) und $w = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix}$ bezüglich der von der 4-Norm induzierten Metrik.

d) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie $\|A\|_\infty^*$ und $\|A\|_2^*$.

Aufgabe 10.2 — **6 Punkte**



a) Zeichnen sie in das gegebene Koordinatensystem, das $\mathbb{F}_7^2$ repräsentiert, die Hammmingkugel $\mathcal{B}_1\left(\binom{2}{2}, \mathbb{F}_7^2\right)$ und die Hammmingkugel $\mathcal{B}_1\left(\binom{5}{4}, \mathbb{F}_7^2\right)$ ein.

b) Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für ein beliebiges Paar von Vektoren $v, w \in (\mathbb{F}_p)^n$ stets gilt

$$|\mathcal{B}_1(v,(\mathbb{F}_p)^n) \triangle \mathcal{B}_1(w,(\mathbb{F}_p)^n)| \in \{0, 2(n(p-1)+1)-2p, 2n(p-1)-2, 2n(p-1)+2\}.$$

c) Wieviele Punkte liegen in der Hammingkugel $\mathcal{B}_3(0, (\mathbb{F}_5)^4)$, wobei $0 = (0, 0, 0, 0)$?

Hinweis: Für Aufgabenteil b) können Sie die geometrische Differenz wie folgt umschreiben $|A \triangle B| = |(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = |A \cup B| - |A \cap B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$

Aufgabe 10.3 **4 Punkte**

Es sei $A = \mathbb{R}^3$, $x, y \in \mathbb{R}^3$ und

$$d : A \times A \to \mathbb{R}, d(x, y) = \begin{cases} \|x - y\|_2 & \text{falls } y = \lambda \cdot x \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}, \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

wobei $\|.\|_2$ die 2−Norm im $\mathbb{R}^3$ ist.

a) Berechnen Sie $d(x, y)$, $d(x, z)$ und $d(y, z)$ wobei $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $z = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass durch d eine Metrik definiert ist.