Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Theresa Kumpitsch

Algebra

Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 11 WS 2019/20

Aufgabe 1. (Semidirekte Produkte – Allgemeines)

(a) Seien H, N zwei Gruppen, $\mathrm{Aut}(N)$ die Automorphismengruppe der Gruppe N und $\rho\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass das kartesisches Produkt $N \times H$, zusammen mit der durch

$$(n_1, h_1) * (n_2, h_2) = (n_1 \cdot \rho(h_1)(n_2), h_1 \cdot h_2) \quad \text{für } n_1, n_2 \in N,\ h_1, h_2 \in H$$

definierten Verknüpfung, eine Gruppe bildet. Diese Gruppe heißt das *semidirekte Produkt* von N mit H bzgl. ρ und wird mit $N \rtimes_\rho H$ bezeichnet. Es wird N mit der Untergruppe $N \times 1$ und H mit der Untergruppe $1 \times H$ identifiziert.

(b) Zeigen Sie, dass N ein Normalteiler in $N \rtimes_\rho H$ ist.

(c) Betrachten Sie die Konjugationsabbildung definiert durch

$$\begin{aligned} N \rtimes_\rho H &\to \mathrm{Aut}(N) \\ g &\mapsto g(\ )g^{-1}\,|_N\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Einschränkung dieses Gruppenhomomorphismus auf H mit ρ übereinstimmt.

(d) Sei G eine Gruppe mit einer Untergruppe H und einem Normalteiler N derart, dass $N \cap H = \{1\}$ und sich jedes Element aus G als Produkt nh mit $n \in N$, $h \in H$ schreiben lässt. Zeigen Sie: $G \simeq N \rtimes_\rho H$ für ein geeignetes $\rho \in \mathrm{Hom}(H, \mathrm{Aut}(N))$.

Aufgabe 2. (Semidirekte Produkte – Beispiele)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\rho : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ gegeben durch $\rho(a)(b) := ab$ für $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ und $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times,\ b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \right\}$$

ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, die zu $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rtimes_\rho (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ isomorph ist.

(b) (i) Seien H, N Gruppen und $\rho\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} N \rtimes_\rho H &\to \mathrm{Sym}(N) \\ (n, h) &\mapsto (x \mapsto n \cdot \rho(h)(x)) \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

(ii) Sei $\rho\colon S_3 \to \mathrm{Aut}(V_4)$ der Gruppenhomomorphismus induziert von der Gruppenoperation von $S_3 \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ auf $V_4 \cong (\mathbb{F}_2)^2$. Zeigen Sie, dass $S_4 = V_4 \rtimes_\rho S_3$.

Aufgabe 3. (Sylowgruppen und Isomorphietyp)

In dieser Aufgabe geht es darum, Beispiele für nicht-isomorphe Gruppen mit isomorphen Sylowuntergruppen sowie gleicher Anzahl an Sylowuntergruppen zu konstruieren.

(a) Sei G eine endliche Gruppe, sodass $a_p(G) = 1$ für alle Primzahlen p. Zeigen Sie, dass G ein Produkt seiner p-Sylowgruppen ist.

(b) Seien $p \neq \ell$ Primzahlen. Sei P eine p-Gruppe, L eine ℓ-Gruppe und $\rho\colon L \to \mathrm{Aut}(P)$ ein Gruppenhomomorphismus. Setze $P^L \coloneqq \{x \in P \mid \rho(h)(x) = x \text{ für alle } h \in L\}$ und $G \coloneqq P \rtimes_\rho L$. Zeigen Sie:

(i) $a_p(G) = 1$;

(ii) $a_\ell(G) = (P : P^L)$.
Tipp: Zeigen Sie, dass $N_G(L) = L \times P^L$ und benutzen Sie (a).

(c) Seien nun $G_i = \mathbb{F}_5^2 \rtimes_{\rho_i} \mathbb{F}_5^\times$, wobei die Gruppenhomomorphismen ρ_i definiert seien durch

$$\rho_1(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad \rho_2(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_5^2) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5).$$

Zeigen Sie, dass G_1 und G_2 nicht isomorph sind.

Aufgabe 4. (Existenz einer Lösungsformel für Polynome 4. Grades)

Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2, 3$. Sei $f \in K[T]$ ein irreduzibles Polynom vierten Grades. Seien ferner $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ die Nullstellen von $f = T^4 - a_1T^3 + a_2T^2 - a_3T + a_4$ in einem algebraischen Abschluss $\overline{K}$. Wir wollen nun die Existenz einer allgemeinen Lösungsformel für f aus der Existenz einer Lösungsformel für kubische Gleichungen (Cardano Formel) herleiten. Hierbei muss an keiner Stelle die tatsächliche Lösungsformel angegeben werden.[1]

(a) Sei $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_4)$. Zeigen Sie, dass es eine (galoissche) Teilerweiterung $L/M/K$ gibt, die Zerfällungskörper eines kubischen Polynoms $g \in K[T]$ mit Nullstellen $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ ist. Es sei $\beta_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4$ vorgegeben und β_3 und β_4 sollen angegeben werden. Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Galoisgruppe von f eine transitive Untergruppe von S_4 ist, d.h.

$$\mathrm{Gal}(f) = \mathrm{Gal}(L/K) \hookrightarrow \mathrm{Sym}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_4\}) \cong S_4.$$

Nehmen Sie zunächst an, dass $\mathrm{Gal}(f) \cong S_4$ und überlegen Sie sich, dass es genau drei Galoiskonjugierte von β_2 gibt. Zeigen Sie dann, dass $\mathrm{Gal}(f)$ auch im allgemeinen Fall drei Elemente permutiert.

(ii) Geben Sie ein Polynom dritten Grad mit Koeffizienten in K an, das β_2 als Nullstelle hat.

[1] Und es sei ausdrücklich davon abgeraten dies zu tun!

(b) Zeigen Sie, dass $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3$ und $\alpha_1 + \alpha_4$ über M Grad 2 haben.
Tipp: Nutzen Sie, dass $a_2 = \beta_2 + \beta_3 + \beta_4, a_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \in K$.

(c) Folgern Sie die Existenz (!) einer allgemeinen Lösungsformel mittels Wurzeln.

Aufgabe 5. (Beispiele auflösbarer Gruppen – Gruppe der affinen Permutationen)

Wir nennen eine Permuation σ von $\mathbb{F}_p$ *affin*, falls $a, b \in \mathbb{F}_p$ mit $a \neq 0$ existieren mit $\sigma(x) = ax + b$ für alle $x \in \mathbb{F}_p$. Bezeichne $G = \mathrm{AGL}_1(\mathbb{F}_p)$ die Menge der affinen Permutationen von $\mathbb{F}_p$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) G ist isomorph zur Untergruppe
$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}_p, a \neq 0 \right\}$$
von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$.

(b) Es gibt einen surjektiven Homomorphismus
$$\varphi \colon G \to \mathbb{F}_p^\times,$$
dessen Kern zyklisch von Ordnung p ist.

(c) G ist auflösbar.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den **23.01.2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/81425887/Algebra`
