Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Theresa Kumpitsch

Algebra

Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 12 WS 2019/20

Aufgabe 1. (zyklische Erweiterung)

Sei K ein Körper, n eine natürliche Zahl mit $\operatorname{char} K \nmid n$ und $\mu_n \subseteq K$. Ferner sei L/K eine zyklische Galoiserweiterung vom Grad n und $\alpha \in L$, so dass $L = K(\alpha)$ und $a := \alpha^n \in K$.

(a) Sei $b \in K^\times$. Zeigen Sie: Es gibt genau dann ein $\beta \in L$ mit $\beta^n = b$, wenn es ein $r \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass b/a^r eine n-te Potenz in K ist.

(b) Seien die äquivalenten Bedingungen in (a) erfüllt. Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an r dafür, dass $L = K(\beta)$ gilt.

Tipp: Sei $\beta \in L$ mit $\beta^n = b$ und $\sigma \in \operatorname{Gal}(L/K)$. Wie kann $\sigma(\beta)$ aussehen?

Aufgabe 2. (Polynome dritten Grades)

Bestimmen Sie die Galoisgruppe von $f(T) := T^3 - 3T^2 + 9T - 9$ über $\mathbb{Q}$ sowie deren Nullstellen in $\bar{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}$.

Aufgabe 3. (Kompositionsreihen – Beispiele)

Bestimmen Sie jeweils eine Kompositionsreihe und die Faktoren für folgende Gruppen:

(a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für beliebige natürliche Zahl $n \geq 2$.

(b) die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$.
Tipp: Die Operation von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_3)$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .[u : v] = [au + bv : cu + dv].$$

Dies liefert einen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \to S_4$.

Aufgabe 4. (einfache Gruppe der Ordnung 60)

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die alternierende Gruppe A_5 die einzige einfache Gruppe der Ordnung 60 ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Sei G eine einfache Gruppe mit $\#G \geq 3$ und H eine Untergruppe vom Index $n = (G : H)$. Zeigen Sie, dass $n!/2 \geq \#G$, und Gleichheit genau für $G = A_n$ gilt.

(b) Sei G eine einfache Gruppe mit $\#G \geq 3$. Zeigen Sie, dass für alle Primteiler $p \mid \#G$ bereits $a_p(G)!/2 \geq \#G$, und Gleichheit genau für $G = A_n$ mit $n = a_p(G)$ gilt.

(c) Sei G eine einfache Gruppe der Ordnung 60. Zeigen Sie zunächst, dass $a_5(G) = 6, a_3(G) = 10$ und $a_2(G)$ entweder 5 oder 15.

(d) Angenommen $a_2(G) = 5$. Folgern Sie, dass $G = A_5$.

(e) Nehmen Sie nun an, dass $a_2(G) = 15$. Zeigen Sie, dass der Schnitt verschiedener 2-Sylows $P \neq Q$ nicht trivial ist.

Tipp: Zählen Sie hierzu die Elemente von Ordnung 3, 5 und einer 2er-Potenz

(f) Zeigen Sie, dass die 2-Sylowgruppe einer Gruppe der Ordnung 60 abelsch ist.

(g) Wie in (e) seien nun P, Q zwei verschiedene 2-Sylows mit $U = P \cap Q \neq 1$. Zeigen Sie, dass $N_G(U)$ in G den Index 3 oder 5 hat, und schließen Sie damit auf $G = A_5$.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den **30.01.2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/81425887/Algebra`
