Mathe für die Informatik I – WiSe 2019/20

Dr. Samuel Hetterich

Zusatzaufgabe 11.3 Determinante

a) Geben Sie die Determinanten der folgenden Matrizen an:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 5 \\ 3 & 17 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

b) Entwickeln Sie die Determinante der Matrix $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

nach der ersten Zeile.

Lösung 11.3 Determinante

a)
Mit der Regel von Sarrus gilt:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 11 \cdot 17 \cdot 3 + 2 \cdot 8 \cdot 5 + 5 \cdot 3 \cdot 2 - 5 \cdot 17 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 3 - 11 \cdot 8 \cdot 2 \\ &= 561 + 80 + 30 - 425 - 18 - 176 = 52. \end{aligned}$$

$$\det(B) = 3 \cdot 8 - 4 \cdot 7 = -4$$

b)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \left[\cdot 5 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}_{=0} + (-2) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}_{=-3} + 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=-1} \right] + 2 \cdot \left[5 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}_{=9} + 0 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}_{=-3} + 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=-3} \right]$$

$$= (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 42 = 79$$

Zusatzaufgabe 11.4 Eigenwerte

Diagonalisieren Sie folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -4 & 6 & 4 \\ -3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

d.h. berechnen Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und k_1,k_2,k_3 mit

$$A = B \cdot \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \cdot B^{-1}$$

Lösung 11.4 Eigenwerte

Die Eigenwerte der Matrix A berechnen sich wie folgt:

$$\det(A - \lambda \cdot Id) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -4 & 6-\lambda & 4 \\ -3 & 3 & 7-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 16\lambda^2 - 68\lambda + 80 \stackrel{!}{=} 0$$

Die kubische Gleichung hat die Nullstellen $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = 10$. Durch das Lösen der Gleichungssysteme $Av = 4v$, $Av = 2v$ und $Av = 10v$ erhalten wir die Eigenvektoren zu den Eigenwerten. Zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$,$\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = 10$ ergeben sich die Eigenvektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da wir zu drei verschiedenen Eigenwerten drei verschiedene Eigenvektoren gefunden haben, sind sie linear unabhängig und bilden eine Basis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ Die Matrix B ist die Basiswechsel-Matrix von der Eigenvektor-Basis $\mathcal{B}$, ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und invertieren der Matrix B ergibt:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Insgesamt erhalten wir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$