Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2020
4. Juni 2020

Geometrie L2/L5
Prof. Dr. Martin Möller
Johannes Schwab

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Sei P ein Punkt auf der Einheitssphäre und sei $\mathcal{P}_P$ die zugehörige Polare. Sei Q ein Punkt, der auf der gleichen Halbkugel (bzgl. $\mathcal{P}_P$) wie P liegt und sei $\mathcal{P}_Q$ die zugehörige Polare.

Zeigen Sie, dass der (sphärische) Abstand $|\overset{\frown}{PQ}|$ gleich dem Winkel zwischen $\mathcal{P}_P$ und $\mathcal{P}_Q$ ist.

(b) Seien nun a und b Großkreise in der Einheitssphäre mit Polen $\mathcal{P}_a$ und $\mathcal{P}_b$, wobei die beiden Pole in der gleichen Halbkugel (bzgl. a) gewählt seien.

Folgern Sie, dass der Winkel zwischen a und b gleich dem (sphärischen) Abstand $|\overset{\frown}{\mathcal{P}_a\mathcal{P}_b}|$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Berechnen Sie die (kürzeste) Flug-Entfernung von Frankfurt (50° nördlicher Breite; 8° östlicher Länge) nach Atlanta (33° nördlicher Breite; 84° westlicher Länge). Nehmen Sie an, dass der Erdradius 6380 km beträgt.

Hinweis: Betrachten Sie das (sphärische) Dreieck bestehend aus Frankfurt, Atlanta und dem Nordpol.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei Δ ein sphärisches Dreieck mit drei gleichen Winkeln und Seitenlängen kleiner oder gleich $\frac{\pi}{2}$ auf der Einheitssphäre.

(a) Zeigen Sie, dass alle drei Seiten von Δ gleich lang sind.

(b) Berechnen Sie diese Länge, falls Δ Flächeninhalt $\frac{\pi}{2}$ hat.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $n \geq 3$ und P_n ein sphärisches n-Eck mit Winkeln α_i auf der Einheitssphäre, sodass für alle i die Relation $0 < \alpha_i < \pi$ gilt.

Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt $\mathfrak{F}(P_n)$ von P_n durch

$$\mathfrak{F}(P_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi$$

gegeben ist.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Ecken des Polygons P_n im Inneren von P_n liegt.

Abgabe bis **12:00** am **Donnerstag, den 11. Juni** über die Olat-Seite der Vorlesung.