**Goethe-Universität Frankfurt**
**Institut für Mathematik**
Sommersemester 2020
11. Juni 2020

**Geometrie L2/L5**
Prof. Dr. Martin Möller
Johannes Schwab

# Übungsblatt 7

## Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Gleichung

$$ax^2 + x + y^2 + y = 0$$

beschreibt für $a \in \mathbb{R}$ einen Kegelschnitt. Diskutieren Sie in Abhängigkeit von $a$, um welche Art von Kegelschnitt es sich handelt.

## Aufgabe 2 (6 Punkte)

Gegeben sei die Ellipse

$$E(c,d) : \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1$$

mit $c > d > 0$ (d.h. die lange Halbachse der Ellipse liegt auf der $x$-Achse). Das Ziel dieser Aufgabe ist es, den folgenden Satz aus der Vorlesung *rechnerisch* zu beweisen:

*Es gibt Punkte $F_1$ und $F_2$ und ein $a \geq 0$, sodass für jeden Punkt $P$ auf der Ellipse $E(c,d)$ gilt*

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a. \tag{1}$$

Beweisen Sie dazu die folgende, stärkere Aussage:

*Es gibt Punkte $F_1 = (-x_0, 0)$ und $F_2 = (x_0, 0)$ und ein $a \geq 0$, sodass für jeden Punkt $P$ auf der Ellipse $E(c,d)$ Gleichung (1) gilt.*

*Hinweis:* Betrachten Sie Gleichung (1) für die beiden Punkte $P_1 = (0, d)$ und $P_2 = (c, 0)$.

## Aufgabe 3 (6 Punkte)

Wir betrachten wieder die Ellipse $E(c,d)$ aus Aufgabe 3 mit den beiden Punkten $F_1$ und $F_2$.

(a) Sei $P = (x_1, y_1)$ ein Punkt auf $E(c,d)$. Zeigen sie, dass die Tangente an $E(c,d)$ im Punkt $P$ die Gleichung

$$T_P : \frac{xx_1}{c^2} + \frac{yy_1}{d^2} = 1$$

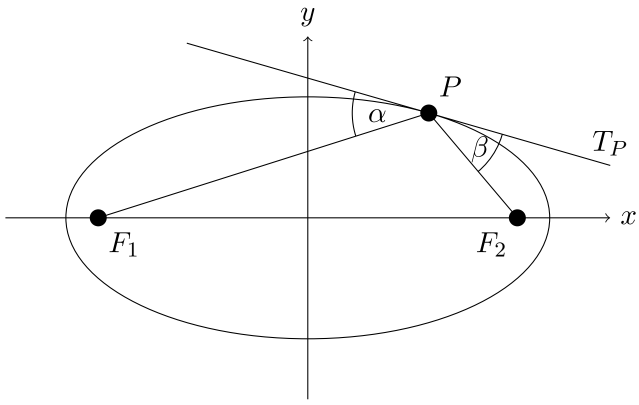
erfüllt.

*Hinweis:* Die Funktionen

$$f(x) = \operatorname{sign}(y_1) d \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}} \quad \text{und} \quad g(y) = \operatorname{sign}(x_1) c \sqrt{1 - \frac{y^2}{d^2}}$$

könnten nützlich sein.

(b) Zeigen Sie, dass die Winkel $\alpha$ und $\beta$ wie im Bild übereinstimmen.




*Bemerkung:* Ein vom Punkt $F_1$ ausgehender Lichtstrahl, der am Rand der Ellipse reflektiert wird, fällt also immer durch den Punkt $F_2$ (und anders herum). Die Punkte $F_1$ und $F_2$ heißen deshalb auch *Brennpunkte* der Ellipse.

---

**Abgabe** bis **12:00** am **Donnerstag, den 18. Juni** über die Olat-Seite der Vorlesung.