Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2020
18. Juni 2020

Geometrie L2/L5
Prof. Dr. Martin Möller
Johannes Schwab

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Leitgerade

$$l = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1\}$$

und der Brennpunkt $F = (0,1)$ legen eindeutig eine Parabel der Form

$$y = ax^2 + bx + c$$

fest. Bestimmen Sie a, b und c.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei die Parabel $P : y = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$.

Zeigen Sie, dass der Brennpunkt F und die Leitgerade l durch

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-b^2}{4a} + c\right) \quad \text{und} \quad l = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{1+b^2}{4a} + c\right\}$$

gegeben sind.

Hinweis: Brennpunkt und Leitgerade einer Parabel sind eindeutig dadurch festgelegt, dass für alle Punkte A auf der Parabel die Gleichung

$$|AF|^2 = |Al|^2$$

erfüllt ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sei die Ellipse $E(c,d) : \dfrac{x^2}{c^2} + \dfrac{y^2}{d^2} = 1$ mit $c > d > 0$. Wir haben auf dem letzten Übungsblatt die Brennpunkte einer solchen Ellipse als

$$F_1 = (-\sqrt{c^2-d^2}, 0) \quad \text{und} \quad F_2 = (\sqrt{c^2-d^2}, 0)$$

bestimmt und gesehen, dass für jeden Punkt $P = (x,y)$ auf der Ellipse gilt

$$|PF_1| = c + x\frac{\sqrt{c^2-d^2}}{c} \quad \text{und} \quad |PF_2| = c - x\frac{\sqrt{c^2-d^2}}{c}.$$

(a) Geben Sie die Exzentrizität $\varepsilon(c,d)$ in Abhängigkeit von c und d an.

(b) Zeigen Sie, dass die Leitgeraden durch

$$l_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -\frac{c^2}{\sqrt{c^2 - d^2}} \right\} \quad \text{und} \quad l_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - d^2}} \right\}$$

gegeben sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Erde umkreist die Sonne auf einer Ellipse, deren einer Brennpunkt die Sonne ist. Im Perihel (kürzester Abstand) ist die Erde 147,09 Millionen Kilometer von der Sonne entfernt, während es im Aphel (längster Abstand) 152,10 Millionen Kilometer sind.

Berechnen Sie die große und kleine Halbachse der Erdbahn.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass der kürzeste bzw. längste Abstand zu einem Brennpunkt an den Schnittpunkten der langen Halbachsen mit der Ellipse angenommen wird.

Abgabe bis **12:00** am **Donnerstag, den 25. Juni** über die Olat-Seite der Vorlesung.