Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Summer term 2020
9. Juli 2020

Elementare Zahlentheorie
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber
M.Sc. Riccardo Zuffetti

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei $L(f,s) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n^s}$ eine Dirichletreihe mit $\sum_{n\geq 0} a_n$.

Wie in der Vorlesung bezeichnet $A_{n,m} := \sum_{k=n}^{m} a_k$ und ρ die Konvergenzabszisse von $L(f,s)$.

(a) Sei $\rho' > \rho$. Zeigen Sie: Es gibt ein $C > 0$ mit $|A_{1,N}| < 2CN^{\rho'}$ für alle N.

Hinweis: Abel-Summation.

(b) Sei nun $\gamma = \limsup_{N\to\infty} \frac{\log|A_{1,N}|}{\log N} = \inf\{\alpha \mid A_{1,N} = \mathcal{O}(N^\alpha)\}$

Folgern Sie: $\rho = \gamma$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass für $\rho' > \gamma$ und $\rho' > \alpha > \gamma$ die Reihe $L(f,\alpha)$ konvergiert.

(c) Sei $d(n) = \sum_{d|n} 1$. Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\sum_{n\leq N} d(n) = \mathcal{O}(N^{1+\varepsilon}).$$

Hinweis: Verwenden Sie $\zeta(s)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\Psi(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots$.

(a) Zeigen Sie, dass die Dirichlet-Reihe Ψ für $\rho > 0$ konvergiert.

Hinweis: Aufgabe 1.

(b) Zeigen Sie, dass $(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \Psi(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt.

Please, upload your solutions on the Olat page of this course, by **14:00** on **Wednesday, 15.07.2020**.