# Algebraische Zahlentheorie

**Goethe–Universität Frankfurt — Sommersemester 2021**

**für Bachelor und Master Mathematik**

JAKOB STIX

Zusammenfassung. — Die Vorlesung Algebraische Zahlentheorie behandelt Dedekindringe, speziell Ringe von ganzalgebraischen Zahlen, die Geometrie der Zahlen nach Minkowski und damit die Endlichkeit der Klassengruppe und den Dirichletschen Einheitensatz, Ringerweiterungen von Dedekindringen, Verzweigungstheorie und wofür die Zeit noch bleibt.

Inhaltsverzeichnis

## 1. Einführung

Die Zahlentheorie beschäftigt sich unter anderem mit den (rationalen) Lösungen von Polynomgleichungen mit rationalen Koeffizienten. Dies führt zwangsläufig auf Zahlkörpererweiterungen $F/\mathbb{Q}$, das sind algebraische Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ mit endlichem Grad $[F:\mathbb{Q}]$. Denn zu einem irreduziblen Polynom $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ liefert der Zahlkörper $F = \mathbb{Q}[X]/(f)$ die universelle Lösung $(X \mod f) \in F$.

Algebraische Zahlentheorie verleiht algebraischen Zahlkörpern arithmetische Feinstruktur. Dazu betrachtet man den Ring der ganzen Zahlen $\mathfrak{o}_F \subseteq F$ mit seinen Primidealen. Dieser verhält sich in mancherlei Hinsicht wie eine glatte Kurve. Zum Beispiel gibt es lokale Parameter. Wenn in $\mathfrak{o}_F$ eindeutige Primfaktorzerlegung gilt, sind dies genau die Primelemente in $\mathfrak{o}_F$. Zumindest lokal gibt es immer eindeutige Primfaktorzerelgung, also auch lokale Parameter. Erweiterungen der Ganzzahlringe entsprechen verzweigten Überlagerungen von glatten Kurven: zumindest im zahmen Fall wird lokal aus einem Parameter eine Wurzel gezogen und geometrisch entsteht ein Verhalten wie bei der Funktion

$$z \mapsto z^e$$

im Komplexen. Es gibt aber auch wilde Verzweigung, und dies macht algebraische Zahlentheorie komplizierter als das geometrische Analogon der glatten Kurve.

In manch anderer Hinsicht benimmt sich $\mathfrak{o}_F$ wie ein offener Teil eines 3-dimensionalen Gebildes, in dem die Primzahlen wie eindimensionale Knoten immersiert sind. Diese Sichtweise trifft bei kohomologischen Fragen auf, zu denen diese Vorlesung hinführen möchte (das Ziel aber nicht erreichen wird).

## Literatur

[Mi] James S. Milne, *Algebraic number theory*, online lecture notes.
[Neu06] Jürgen Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Nachdruck, Springer, 2006.
[Sch07] Alexander Schmidt, *Einführung in die algebraische Zahlentheorie*, Springer, 2007, xi+215 Seiten.
[Ser79] Jean-Pierre Serre, *Local fields*, Springer, Graduate Texts in Mathematics 67, 1979.

# Teil 1. Dedekindringe

## 2. Ganzalgebraische Zahlen

2.1. **Ganze Elemente und Ringerweiterungen.** Wir wollen die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ verallgemeinern. Dazu brauchen wir den Begriff einer ganzen Ringerweiterung.

**Definition 2.1.** (1) In einem Ringhomomorphismus $A \to B$ heißt ein Element $b \in B$ ganz über $A$, wenn es ein normiertes Polynom

$$f(X) = X^d + a_1 X^{d-1} + \ldots + a_d \in A[X]$$

gibt mit $f(b) = 0$ in $B$. Ein solches Polynom nennen wir **Ganzheitspolynom** für $b$.

(2) Ein Ringhomomorphismus $A \to B$ heißt **ganz**, wenn alle $b \in B$ ganz über $A$ sind.

*Beispiel* 2.2. (1) Jedes $b \in \mathrm{im}(A \to B)$ ist ganz über $A$. Das lineare Polynom $X - a$ ist ein Ganzheitspolynom für $f(a)$.

(2) Ein surjektiver Ringhomomorphismus $A \twoheadrightarrow B$ ist ganz.

(3) In einer Körperwerweiterung $K \hookrightarrow L$ ist ein $y \in L$ ganz über $K$ genau dann, wenn $y$ algebraisch über $K$ ist. Eine ganze Körpererweiterung ist dasselbe wie eine algebraische Körpererweiterung.

(4) Sei $B \subseteq C$ ein Teilring und $A \to B$ ein Ringhomomorphimus, damit auch die Verkettung $A \to C$. Ein Element $b \in B$ ist auch ein Element von $C$. Dann ist $b$ ganz über $A$ als Element von $B$ genau dann, wenn $b$ ganz ist über $A$ als Element von $C$.

Ein ganzes Element zu sein hängt also nur von der von $b$ erzeugten Unteralgebra $A[b] \subseteq B$ ab, also dem Bild von $A[X] \to B$ mit $X \mapsto b$.

(5) Sei $A_0 \subseteq B$ das Bild von $A \to B$. Dann ist ein $b \in B$ ganz über $A$ genau dann, wenn es ganz über $A_0$ ist.

Wie beim Begriff des algebraischen Elements bei Körpererweiterungen brauchen wir ein besseres Kriterium für *ganz*, um zu zeigen, daß Summen und Produkte von ganzen Elementen wieder ganz sind.

**Satz 2.3.** *Sei $A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $b \in B$. Dann*

$$b \text{ ist ganz über } A \iff A[b] \text{ ist endlich erzeugter } A\text{-Modul.}$$

*Genauer:*

*(1) Sind $b_1, \ldots, b_n \in B$ ganz über $A$, dann ist die davon erzeugte $A$-Unteralgebra*

$$A[b_1, \ldots, b_n] \subseteq B$$

*als $A$-Modul endlich erzeugt.*

*(2) Wenn $b \in B$ in einer $A$-Unteralgebra $B_0 \subseteq B$ liegt, die als $A$-Modul endlich erzeugt ist, dann ist $b$ ganz über $A$.*

*Beweis.* (1) Die $A$-Algebra $A[b_1, \ldots, b_n]$ ist das Bild des Polynomrings $A[X_1, \ldots, X_n]$ unter Auswertung in $X_i \mapsto b_i$. Daher wird $A[b_1, \ldots, b_n]$ von den Bildern der Monome $b_1^{e_1} \ldots b_n^{e_n}$ als $A$-Modul erzeugt.

Wir nehmen nun an, daß die $b_i$ ganz über $A$ sind mit Ganzheitsrelationen vom Grad $d_i$. Dann erzeugen schon die Monome $b_1^{e_1} \ldots b_n^{e_n}$ mit $e_i < d_i$. Dies zeigt man per Induktion nach dem Grad, indem man die Ganzheitsrelation nutzt, um einen Faktor $b_i^{d_i}$ in einem Monom durch eine Linearkombination von $b_i$-Potenzen mit kleineren Exponenten zu ersetzen.

Von diesen Monomen mit $e_i < d_i$ für alle $i$ gibt es nur endlich viele.

(2) Sei $x_1, \ldots, x_r \in B_0$ ein Erzeugendensystem als $A$-Modul. Dann gibt es $c_{ij} \in A$ mit

$$bx_i = \sum_{j=1}^{r} c_{ij} x_j$$

Mit der Matrix $C = (c_{ij}) \in \mathrm{M}_r(A)$, die auf $B_0^r$ wirkt, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} bx_1 \\ \vdots \\ bx_r \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

oder $M = b \cdot \mathbf{1} - C$ annulliert den Vektor mit Einträgen $x_i$. Sei $M^\#$ die adjunkte Matrix mit $M^\# M = \det(M) \cdot \mathbf{1}$. Dann gilt

$$0 = M^\# M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \det(M) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}.$$

Also annulliert $\det(M)$ jeden der $x_i$ und damit $\det(M) \cdot B_0 = 0$. Wegen $1 \in B_0$ folgt $\det(M) = 0 \in B$.

Wenn wir $\det(M)$ nach der Leibniz-Formel ausrechnen, dann erhalten wir mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi_C(X) = X^r + \ldots \in A[X]$$

den Satz von Cayley–Hamilton:

$$\chi_C(b) = \det(M) = 0$$

und das ist die gesuchte Ganzheitsrelation für $b$. □

**Korollar 2.4.** *Sei $A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Die Menge der über $A$ ganzen Elemente von $B$ bildet eine $A$-Unteralgebra von $B$.*

*Beweis.* Wir müssen sehen, daß mit $b_1, b_2 \in B$ ganz über $A$ auch $b_1 + b_2$ und $b_1 b_2$ ganz über $A$ sind. Wegen Satz 2.3 ist $A[b_1, b_2] \subseteq B$ ein endlich erzeugter $A$-Modul. Diese Unteralgebra enthält Summe und Produkt, und so sind diese ebenfalls ganz über $A$ wieder mit Satz 2.3. □

**Korollar 2.5.** *Seien $A \to B \to C$ Ringhomomorphismen. Dann gilt:*

*(1) $B$ ganz über $A$ und $C$ ganz über $B \implies C$ ganz über $A$.*
*(2) $C$ ganz über $A \implies C$ ganz über $B$.*
*(3) Wenn $B \subseteq C$ injektiv ist, dann gilt auch:*

$$C \text{ ganz über } A \implies B \text{ ganz über } A.$$

*Beweis.* (2) Eine Ganzheitsrelation für $c \in C$ mit Koeffizienten in $A$ führt via $A \to B$ zu einer mit Koeffizienten in $B$.

(3) haben wir bereits behandelt.

(1) Sei $c \in C$ und $f(X) = X^n + b_1 X^{n-1} + \ldots + b_n \in B[X]$ mit $f(c) = 0$. Sei $c_i$ das Bild von $b_i$ in $C$. Wir setzen abkürzend

$$A_0 = A[c_1, \ldots, c_n] \subseteq C.$$

Dann ist $c$ auch ganz über $A_0$, denn alle nötigen Koeffizienten einer Ganzheitsrelation sind vorhanden. Genauer ist

$$A_0[c] = A_0 + A_0 c + \ldots + A_0 c^{n-1}$$

als $A$-Modul. Weil $A_0$ als $A$-Modul nach Satz 2.3 endlich erzeugt ist, denn die $b_i$ sind ganz über $A$, folgt auch, daß $A_0[c]$ als $A$-Modul endlich erzeugt ist. Wieder nach Satz 2.3 folgt, daß $c$ ganz über $A$ ist. □

## 2.2. **Der ganze Abschluß.**

**Definition 2.6.** (1) Ein Ring $A$ heißt **ganz abgeschlossen in** einer Ringerweiterung $A \subseteq B$, wenn jedes $b \in B$, das ganz über $A$ ist, bereits in $A$ liegt.

(2) Der **ganze Abschluß** eines Rings $A$ in einer Ringerweiterung $A \subseteq B$ ist die $A$-Unteralgebra $\tilde{A} \subseteq B$, die aus allen über $A$ ganzen Elementen von $B$ besteht.

*Beispiel* 2.7. In einer Körpererweiterung $L/K$ ist der ganze Abschluß von $K$ in $L$ der Zwischenkörper aller über $K$ algebraischen Elemente.

**Definition 2.8.** Ein **normaler** (oder **ganz abgeschlossener**) Integritätsring ist ein Integritätsring $A$ mit Quotientenkörper $K$, so daß für alle $x \in K$, die über $A$ ganz sind, gilt $x \in A$.

*Beispiel* 2.9. (1) Körper sind normale Integritätsringe.

(2) Faktorielle Ringe, also insbesondere Hauptidealringe wie $\mathbb{Z}$ oder Polynomringe $k[X]$ über einem Körper $k$ sind normale Integritätsringe.

Sei $A$ faktoriell und $x = p/q \in K$ ein über $A$ ganzes Element des Quotientenkörpers $K$ von $A$ als gekürzter Bruch mit teilerfremden $p, q \in A$. Sei $f(X) = X^d + a_1 X^{d-1} + \ldots \in A[X]$ eine Ganzheitsrelation für $x$. Dann gilt

$$0 = q^d f(x) = p^d + q \cdot \left(a_1 p^{d-1} + a_2 p^{d-2} q + \ldots + a_d q^{d-1}\right),$$

und $q$ ist ein Teiler von $p^d$. Dies geht aber bei teilerfremden $p, q$ nur, wenn $q$ eine Einheit ist. Aber dann ist $x = q^{-1} p \in A$.

**Proposition 2.10.** *Sei $A$ ein normaler Integritätsring mit Quotientenkörper $K$ und $L/K$ eine algebraische Körpererweiterung. Sei $B$ der ganze Abschluß von $A$ in $L$.*

*(1) $B$ ist ein normaler Integritätsring mit Quotientenkörper $L$.*

*(2) Ein $b \in L$ ist ganz über $A \iff$ das Minimalpolynom $P_{b/K}(X)$ von $b$ über $K$ hat Koeffizienten in $A$.*

*Beweis.* (1) Zu $y \in L$ gibt es $a_i, s \in A$ mit

$$y^n + \frac{a_1}{s} y^{n-1} + \ldots + \frac{a_n}{s} = 0.$$

Skalieren mit $s$ liefert

$$(sy)^n + a_1 (sy)^{n-1} + s a_2 (sy)^{n-2} + \ldots + s^{n-1} a_n = 0.$$

Daher ist $b = sy$ ganz über $A$, und $y = \frac{b}{s} \in \mathrm{Quot}(B)$ zeigt $L = \mathrm{Quot}(B)$ (sogar mit Nennern aus $A$!).

(2) Wenn $P_{b/K}(X)$ Koeffizienten aus $A$ hat, dann ist $b$ ganz über $A$. Für die Umkehrung erweitern wir $L$ so, daß $P_{b/K}(X)$ in $L$ in Linearfaktoren zerfällt. Das ändert nichts an der Frage, ob $b$ ganz über $A$ ist.

Sei $f(X) \in A[X]$ ein Ganzheitspolynom für $b$. Dann gilt $P_{b/K}(X) \mid f(X)$ in $K[X]$. Insbesondere sind alle Nullstellen von $P_{b/K}(X)$ auch Nullstellen von $f(X)$ und damit auch ganz über $A$. Die Koeffizienten von $P_{b/K}(X)$ sind polynomial in den Nullstellen mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$, nämlich $\pm$ die elementarsymmetrischen Polynome. Daher sind die Koeffizienten von $P_{b/K}(X)$ aus $K$ und ganz über $A$. Weil $A$ normal ist, folgt $P_{b/K}(X) \in A[X]$. □

**Korollar 2.11.** *Mit der Notation wie in Propositon 2.10 gilt: $B$ enthält eine $K$-Basis von $L$. Die natürliche Abbildung*

$$B \otimes_A K \to L$$

*ist ein Isomorphismus.*

*Beweis.* Das Tensorprodukt ist eine Lokalisierung, also wird das injektive $B \hookrightarrow L$ zum immer noch injektiven $B \otimes_A K \to L \otimes_A K$. Da aber die Elemente von $A \setminus \{0\}$ in $L$ bereits invertierbar sind, ist $L \otimes_A K = L$. Dies zeigt „Isomorphismus“.

Das Bild der natürlichen Abbildung ist nichts anderes als der $K$-Spann von $B$. □

Norm und Spur berechnen sich als Koeffizienten des Minimalpolynoms. Daher haben wir sofort das folgende Korollar.

**Korollar 2.12.** *Sei $A$ ein normaler Integritätsring mit Quotientenkörper $K$ und $L/K$ eine endliche algebraische Körpererweiterung. Sei $B$ der ganze Abschluß von $A$ in $L$. Norm und Spur schränken ein zu*

*(1) einem $A$-Modulhomomorphismus*

$$\mathrm{tr}_{L/K} : B \to A,$$

*(2) einer multiplikativen Abbildung*

$$N_{L/K} : B \to A.$$

## 2.3. **Ganzzahlringe.**

**Definition 2.13.** Ein **Zahlkörper** ist eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.

Nach dem Satz vom primitiven Element kann ein Zahlkörper $F$ von einem geeigneten Element $\alpha \in F$ erzeugt werden. Da $F/\mathbb{Q}$ nur endlich viele Zwischenweiterungen $\mathbb{Q} \subseteq M \subseteq F$ besitzt und jede davon in $F$ ein echter $\mathbb{Q}$-Untervektorraum ist, tut es jedes

$$\alpha \in F \setminus \bigcup_{M \subsetneq F} M.$$

Damit hat $F$ die Form

$$F = \mathbb{Q}[X]/(f(X))$$

mit dem irreduziblen Minimalpolynom $f(X) = P_{\alpha/\mathbb{Q}}(X) \in \mathbb{Q}[X]$ des Elements $\alpha$.

**Definition 2.14.** Der Ring der ganzen algebraischen (oder ganzalgebraischen) Zahlen $\mathfrak{o}_F$ in $F$ ist der ganze Abschluß von $\mathbb{Z}$ in $F$.

**Korollar 2.15.** $\mathbb{Z} = \mathfrak{o}_{\mathbb{Q}}$.

*Beweis.* $\mathbb{Z}$ ist ein Hauptidealring. □

*Beispiel* 2.16. Die Gaußschen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}[i]$ sind der Ring der ganzen Zahlen in $\mathbb{Q}(i)$. Zum einen ist $i^2 = -1$ eine Ganzheitsrelation für $i$, somit $\mathbb{Z}[i] \subseteq \mathfrak{o}_{\mathbb{Q}(i)}$. Zum andern ist $\mathbb{Z}[i]$ bezüglich der Norm ein euklidischer Ring und damit ein Hauptidealring. Nach Beispiel 2.9 ist damit $\mathbb{Z}[i]$ normal. Jedes über $\mathbb{Z}$ ganze Element von $\mathbb{Q}(i)$ ist erst recht ganz über $\mathbb{Z}[i]$, also bereits in $\mathbb{Z}[i]$. Das zeigt $\mathbb{Z}[i] = \mathfrak{o}_{\mathbb{Q}(i)}$.

*Bemerkung* 2.17. Aus Beispiel 2.2 (4) schließen wir, daß für ein Element eines Zahlkörpers die Eigenschaft ganzalgebraisch zu sein, nicht vom Zahlkörper abhängt, in dem man es betrachtet. Sei $F \subseteq E$ eine Erweiterung von Zahlkörpern und $x \in F$. Dann ist $x$ ganz als Element von $F$ genau dann, wenn es ganz als Element von $E$ ist. Das führt zu

$$\mathfrak{o}_E \cap F = \mathfrak{o}_F$$

und im Spezialfall zu $\mathfrak{o}_F \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

*Beispiel* 2.18. Ein **quadratischer Zahlkörper** ist ein $F/\mathbb{Q}$ vom Grad 2. Diese sind von der Form $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für ein eindeutiges quadratfreies $d \in \mathbb{Z}$. Wir bestimmen mittels Proposition 2.10 den Ganzzahlring $\mathfrak{o}_F$. Sicher gilt

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \subseteq \mathfrak{o}_F,$$

aber nicht immer herrscht hier Gleichheit. Ein $y = a + b\sqrt{d} \in F$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ ist ganz genau dann, wenn

$$\operatorname{tr}(y) = 2a \quad \text{und} \quad N(y) = a^2 - db^2$$

ganze Zahlen sind. Damit hat $a$ höchstens Nenner 2. Weil $d$ quadratfrei ist, gilt dasselbe für $b$:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \subseteq \mathfrak{o}_F \subseteq \frac{1}{2} \cdot \mathbb{Z}[\sqrt{d}].$$

Aus $N(y) \in \mathbb{Z}$ folgt, daß entweder beide $a, b \in \mathbb{Z}$ oder beide halbzahlig: $a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$, also $a = \alpha/2$, $b = \beta/2$ mit ungeraden $\alpha, \beta$. Letzteres geht nur, wenn $4 \mid \alpha^2 - d\beta^2 \equiv 1 - d \pmod 4$. Wenn $d \equiv 1 \pmod 4$, dann ist $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ ganz als Lösung von

$$X^2 - X + \frac{1-d}{4} = 0.$$

Insgesamt ergibt sich nun für quadratfreies $d \in \mathbb{Z}$:

$$\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})} = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}] & d \not\equiv 1 \pmod 4 \\ \mathbb{Z}[w] & d \equiv 1 \mod 4 \end{cases}$$

*Bemerkung* 2.19. Aus dem Gauß-Lemma folgt, daß für eine ganzalgebraische Zahl die Ganzheitspolynome in $\mathbb{Z}[X]$ genau die Vielfache in $\mathbb{Z}[X]$ des Minimalpolynoms sind.

2.4. **Die Diskriminante und Spurform.** Sei $M \simeq A^n$ ein freier $A$ Modul vom Rang $n$ und

$$t : M \times M \to A$$

eine symmetrische $A$-Bilinearform auf $M$. Diese wird nach Wahl einer $A$-Basis $x_1, \ldots, x_n \in M$ durch die Gramsche Matrix

$$G = (t(x_i, x_j)) \in \mathrm{M}_n(A)$$

beschrieben. Die Diskriminante der Bilinearform bezüglich der Basis $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ist

$$\Delta = \Delta(x_1, \ldots, x_n) = \det(G) \in A.$$

Basiswechsel mit $S \in \mathrm{GL}_n(A)$ transformiert die Gramsche Matrix zu $G' = S^t G S$ und ändert damit die Diskriminate zu

$$\Delta' = \det(S)^2 \cdot \Delta.$$

Wir definieren die **Diskriminante** der $A$-Bilinearform durch

$$\Delta_M = \Delta(x_1, \ldots, x_n) \cdot (A^\times)^2$$

als Element von $A$ bis auf multiplikative Quadrate von Einheiten. Als solche hängt $\Delta_M$ nicht von der Wahl der Basis ab.

*Bemerkung* 2.20. Wenn $A = \mathbb{Z}$, dann liefert die Diskriminante einen Wert in $\mathbb{Z}$, denn $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$ und Quadrate von Einheiten sind immer 1.

**Proposition 2.21.** *Eine symmetrische Bilinearform auf einem freien $A$-Modul $M$ ist perfekt, d.h. die adjungierte Abbildung induziert einen Isomorphismus*

$$M \simeq \mathrm{Hom}_A(M, A)$$

*genau dann, wenn $\Delta_M \in A^\times$.*

*Beweis.* Die Gramsche Matrix ist die Matrix der adjungierten Abbildung bezüglich Basis und dualer Basis. □

Zu einer endlichen Körperweiterung $L/K$ haben wir die **Spurform**, eine symmetrische $K$-Bilinearform

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_{L/K} : L \times L &\to K \\ (x, y) &\mapsto \mathrm{tr}_{L/K}(xy). \end{aligned}$$

Aus der Algebra ist bekannt:

**Satz 2.22.** *$L/K$ ist separabel $\iff$ die Spurform ist nichtausgeartet.*

Sei $A$ ein normaler Integritätsring mit Quotientenkörper $K$. Sei $L/K$ endlich separabel und sei $B$ der ganze Abschluß von $A$ in $L$. Weil die Spur ganze Elemente auf ganze Elemente abbildet, schränkt die Spurform zu einer $A$-Bilnearform

$$\mathrm{tr}_{L/K} : B \times B \to A$$

ein. Diese Spurform sagt sehr viel über die Erweiterung $A \subseteq B$ aus.

2.5. **Die additive Struktur.** Die Existenz einer Basis wie in der folgenden Proposition wird durch Korollar 2.11 gewährleistet.

**Proposition 2.23.** *Sei $A$ ein normaler Integritätsring mit Quotientenkörper $K$. Sei $L/K$ endlich separabel und sei $B$ der ganze Abschluß von $A$ in $L$. Sei $\beta_1, \ldots, \beta_n$ eine $K$-Basis von $L$ mit $\beta_i \in B$. Sei $\Delta_M$ die Diskrimante der Spurform eingeschränkt auf $M = \langle \beta_i \ ; \ i = 1, \ldots, n \rangle_A$. Dann gilt*

$$M \subseteq B \subseteq \frac{1}{\Delta_M} M.$$

*Beweis.* Sei $x = \sum_i a_i \beta_i \in L$ mit $a_i \in K$ ganz über $A$. Dann gilt für alle $i = 1, \ldots, n$

$$\mathrm{tr}_{L/K}(x\beta_i) \in A$$

weil $A$ normal ist.

Sei $G$ die Gramsche Matrix der Spurform bezüglich der Basis $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Dann

$$G \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_j \mathrm{tr}_{L/K}(\beta_i \beta_j) a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathrm{tr}_{L/K}(\beta_i x) \\ \vdots \end{pmatrix} \in A^n$$

und aus dem Determinantentrick folgt

$$\Delta_M \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = G^{\#} G \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in G^{\#} A^n \subseteq A^n. \qquad \square$$

**Korollar 2.24.** *Mit der Notation wie in Propositon 2.23 folgt, daß $B$ ein $A$-Untermodul eines freien $A$-Moduls vom Rang $n = [L : K]$ ist.*

*Beweis.* Der Modul $\frac{1}{\Delta_M} M$ ist freier $A$-Modul vom Rang $n$. $\square$

**Korollar 2.25.** *Sei $A$ ein Hauptidealring mit Quotientenkörper $K$. Sei $L/K$ endlich separabel und sei $B$ der ganze Abschluß von $A$ in $L$. Dann ist $B$ ein freier $A$-Modul vom Rang $[L : K]$.*

*Beweis.* Hauptiealringe sind normale Integritätsringe. Daher ist $B$ ein Untermodul eines freien Moduls nach Korollar 2.24. Nach dem Elementarteilersatz ist damit $B$ selbst ein freier $A$-Modul. Den Rang berechnet man aus

$$\mathrm{rg}_A(B) = \dim_K(B \otimes_A K) = \dim_K(L). \qquad \square$$

**Korollar 2.26.** *Sei $F$ ein Zahlkörper. Dann ist $\mathfrak{o}_F$ als abelsche Gruppe frei von Rang $[F : \mathbb{Q}]$.*

*Beweis.* $\mathbb{Z}$ ist ein Hauptidealring. $\square$

2.6. **Ganzzahlbasen, Ordnungen und Diskriminante.** Der Ring der ganzen Zahlen $\mathfrak{o}_F$ in einem Zahlkörper ist eine Ordnung in $F$:

**Definition 2.27.** Sei $F$ ein Zahlkörper. Eine **Ordnung** in $F$ ist ein Teilring

$$\mathfrak{o} \subseteq F,$$

der

(i) eine $\mathbb{Q}$-Basis von $F$ enthält, und
(ii) als abelsche Gruppe endlich erzeugt ist.

Der Ring der ganzen Zahlen $\mathfrak{o}_F$ wird **Maximalordnung** (oder **Hauptordnung**) genannt.

Aus Satz 2.3 folgt, daß eine Ordnung $\mathfrak{o}$ in $F$ in $\mathfrak{o}_F$ enthalten sein muß. Der Name Maximalordnung ist also gerechtfertigt. Weiter ist

$$\mathbb{Q} \otimes \mathfrak{o} = \mathbb{Q}\mathfrak{o} = F$$

und daher $\mathfrak{o}$ als abelsche Gruppe frei vom Rang $[F : \mathbb{Q}]$.

**Definition 2.28.** Die **(absolute) Diskriminante** einer Ordnung $\mathfrak{o} \subseteq F$ ist die Diskriminante der Spurform

$$\mathrm{tr}_{F/\mathbb{Q}} : \mathfrak{o} \times \mathfrak{o} \to \mathbb{Z}$$

und damit ein Element $\Delta_{\mathfrak{o}} \in \mathbb{Z}$.

Die Diskriminante der Maximalordnung $\mathfrak{o}_F$ bezeichnen wir mit

$$\Delta_F$$

und nennen sie die **(absolute) Diskriminante** des Zahlkörpers $F$.

*Bemerkung* 2.29. Wir betonen nochmals, daß man die Diskriminante nach Wahl einer $\mathbb{Z}$-Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von $\mathfrak{o}_F$ durch

$$\Delta_F = \det(\mathrm{tr}_{F/\mathbb{Q}}(\alpha_i \alpha_j)) \in \mathbb{Z}$$

berechnet. Die Diskriminante ist eine wichtige Invariante von $F$, die wir später als Wurzel eines Volumens wiederfinden.

**Proposition 2.30.** *Sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ eine $\mathbb{Q}$-Basis eines Zahlkörpers aus ganzen Elementen und $M = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle_{\mathbb{Z}}$ die von diesen Elementen erzeugte abelsche Gruppe. Dann gilt*

$$\Delta_M = (\mathfrak{o}_F : M)^2 \cdot \Delta_F.$$

*Insbesondere, wenn $\Delta_M$ quadratfrei ist, dann ist bereits $\mathfrak{o}_F = M$.*

*Beweis.* Wir berechnen $\Delta_M$ bezüglich einer geeigneten $\mathbb{Z}$-Basis. Nach dem Elementarteilersatz gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$ und eine $\mathbb{Z}$-Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von $\mathfrak{o}_F$ mit

$$M = \langle \lambda_1 \alpha_1, \ldots, \lambda_n \alpha_n \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Die Basiswechselmatrix von der Basis für $\mathfrak{o}_F$ zur Basis für $M$ ist diagonal mit Einträgen $\lambda_i$. Es gilt

$$(\mathfrak{o}_F : M) = \#\prod_{i=1}^{n}(\mathbb{Z}/\lambda_i\mathbb{Z}) = \prod_{i=1}^{n}|\lambda_i|.$$

Für die Determinanten der entsprechenden Gramschen Matrizen ergibt sich

$$\Delta_M = (\mathrm{tr}_{F/\mathbb{Q}}(\lambda_i\alpha_i\lambda_j\alpha_j)) = \big(\prod_i \lambda_i\big)^2 \cdot \Delta_F = (\mathfrak{o}_F : M)^2 \cdot \Delta_F.$$

Das insbesondere ist dann klar. □

**Korollar 2.31.** *Sei $\mathfrak{o} \subseteq F$ eine Ordnung. Dann ist $(\mathfrak{o}_F : \mathfrak{o}) < \infty$ und*

$$\Delta_{\mathfrak{o}} = (\mathfrak{o}_F : \mathfrak{o})^2 \cdot \Delta_F.$$

*Beispiel* 2.32. Sei $D = e^2 \cdot d$ mit $e, d \in \mathbb{Z}$ und $d \neq 1$ quadratfrei. Dann ist $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein quadratischer Zahlkörper und

$$\mathfrak{o} = \mathbb{Z}[\sqrt{D}] \subseteq \mathfrak{o}_F$$

eine Ordnung der Diskriminante (bezüglich $\mathbb{Z}$-Basis $1, \sqrt{D}$ berechnet)

$$\Delta_{\mathfrak{o}} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2D \end{pmatrix} = 4D.$$

*Beispiel* 2.33. Sei $d \neq 1$ quadratfrei und $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ der zugehörige quadratische Zahlkörper. Für $d \not\equiv 1 \pmod 4$ ist

$$\mathfrak{o}_F = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$$

und

$$\Delta_F = 4d$$

haben wir bereits ausgerechnet. Sei deshalb nun $d \equiv 1 \pmod 4$ und $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$. Dann ist

$$\mathfrak{o}_F = \mathbb{Z}[\omega]$$

und (bezüglich der Basis $1, \omega$)

$$\Delta_F = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1+d}{2} \end{pmatrix} = d.$$

**Satz 2.34** (Stickelbergerscher Diskriminantensatz)**.** *Sei $F$ ein Zahlkörper. Dann ist die Diskriminante $\Delta_F$ entweder kongruent 0 oder 1 modulo 4.*

*Beweis.* Sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathfrak{o}_F$ und $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ seien die Einbettungen $F \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}$. In der Leibniz-Formel für die Determinante der Matrix $C = (\sigma_i(\alpha_j))$ schreiben wir $P$ für die Summe der Beiträge zu geraden Permutationen, und $N$ für die Summe der Beiträge zu ungeraden Permutationen:

$$\det(C) = P - N.$$

Sei $\tilde{F}$ eine Galoissche Hülle von $F/\mathbb{Q}$. Die Wirkung von $G = \mathrm{Gal}(\tilde{F}/\mathbb{Q})$ auf $C$ ist durch Permutation der Zeilen. Daher gilt für alle $g \in G$:

$$g(\{P, N\}) = \{P, N\}.$$

Demnach sind Summe $P + N$ und Produkt $PN$ Galoisinvariant, also in $\mathbb{Q}$. Da dies polynomiale Ausdrücke in den Einträgen von $C$ und damit ganze algebraische Zahlen sind, gilt $P+N, PN \in \mathbb{Z}$. Demnach

$$\Delta_F = \det(C)^2 = (P-N)^2 = (P+N)^2 - 4PN \equiv (P+N)^2 \pmod 4.$$

Quadrate sind aber 0 oder 1 (mod 4). □

**Satz 2.35.** *Seien $F_1$, $F_2$ Zahlkörper mit zueinander teilerfremder Diskriminante $\Delta_{F_1}$ und $\Delta_{F_2}$, und sei $F = F_1F_2$ das Kompositum.*

*(1) Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathfrak{o}_{F_1}$ und $\beta_1, \dots, \beta_m$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathfrak{o}_{F_2}$, dann liefert*

$$\{\alpha_i\beta_j \ ; \ 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$$

*eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathfrak{o}_F$.*

*(2) $\mathfrak{o}_F = \mathfrak{o}_{F_1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{o}_{F_2}$.*

*(3) Die Diskriminante von $F$ berechnet sich als*

$$\Delta_F = \Delta_{F_1}^{[F_2:\mathbb{Q}]} \cdot \Delta_{F_2}^{[F_1:\mathbb{Q}]}.$$

*Beweis.* Der Beweis ist eine etwas aufwändigere Übungsaufgabe. □

Sei $L/K$ eine endliche separable Erweiterung und $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluß von $K$. Dann gilt

$$\mathrm{tr}_{L/K}(y) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Hom}_K(L,\bar{K})} \sigma(y).$$

Damit bekommt die Gramsche Matrix zur Spurform eine besondere Gestalt. Wir nummerieren

$$\mathrm{Hom}_K(L, \bar{K}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$$

mit $n = [L : K]$ und betrachten für eine $K$-Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ von $L$ die Matrix

$$C = (\sigma_i(\alpha_j)) \in \mathrm{M}_n(\bar{K}).$$

Dann ist

$$(C^tC)_{ij} = \sum_k \sigma_k(\alpha_i)\sigma_k(\alpha_j) = \mathrm{tr}_{L/K}(\alpha_i\alpha_j)$$

somit $C^tC$ die Gramsche Matrix der Spurform. Folglich gilt in der üblichen Notation für $M = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_A$

$$\Delta_M = \det(C)^2.$$

Dies nutzen wir nun für spezielle Ordnungen aus.

*Beispiel* 2.36. Seien $F$ ein Zahlkörper und $\alpha \in \mathfrak{o}_F$ ein ganzes primitives Element, also $F = \mathbb{Q}(\alpha)$. Dann ist $\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathfrak{o}_F$ eine Ordnung mit $\mathbb{Z}$-Basis $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$, wobei $n = [F : \mathbb{Q}]$. Wir schreiben $f(X)$ für das Minimalpolynom von $\alpha$ und faktorisieren (über einer Galoisschen Hülle):

$$f(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$$

wobei $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ die verschiedenen konjugierten von $\alpha$ sind. Aus der Produktregel folgt

$$f'(\alpha_i) = \prod_{j \ne i}(\alpha_i - \alpha_j).$$

Seien $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ die vescheidenen Einbettungen von $F$ nach $\bar{\mathbb{Q}}$. Dann gilt (berechnet bezüglich der $\mathbb{Z}$-Basis $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$) mit der Formel für die Vandermonde-Determinante

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbb{Z}[\alpha]} &= \det((\sigma_i(\alpha^j))^2 = \det((\alpha_i^j))^2 \\ &= \Big(\prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)\Big)^2 = (-1)^{n(n-1)/2}\prod_i f'(\alpha_i) = (-1)^{n(n-1)/2}N_{F|\mathbb{Q}}(f'(\alpha)). \qquad (2.1)\end{aligned}$$

*Beispiel* 2.37. Sei $F = \mathbb{Q}(\alpha)$ mit Minimalpolynom von $\alpha$ von der Form

$$f(X) = X^n + aX + b.$$

Dann ist

$$\Delta_{\mathbb{Z}[\alpha]} = (-1)^{n(n-1)/2} \cdot \big(n^n b^{n-1} + (-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}a^n\big).$$

Wir müssen wegen (2.1) nur die Norm der Ableitung ausgewertet in $\alpha$ ausrechnen. Dazu setzen wir

$$\beta = f'(\alpha) = n\alpha^{n-1} + a$$

und

$$-\alpha\beta = -n\alpha^n - a\alpha = n(a\alpha + b) - a\alpha = (n-1)a(\alpha + \varepsilon)$$

wobei

$$\varepsilon = \frac{nb}{(n-1)a}.$$

Uns interessiert $N_{F/\mathbb{Q}}(\beta)$, wir kennen $N_{F/\mathbb{Q}}(-\alpha) = b$ aus dem konstanten Term des Minimalpolynoms und wir berechenen mittels Taylorentwicklung

$$N_{F/\mathbb{Q}}(\alpha+\varepsilon) = (-1)^n \cdot \text{konst. Koeff. von } f(X-\varepsilon) = (-1)^n f(-\varepsilon) = \varepsilon^n + (-1)^{n-1}a\varepsilon + (-1)^n b.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} b \cdot N_{F/\mathbb{Q}}(f'(\alpha)) &= N_{F/\mathbb{Q}}(-\alpha\beta) = N_{F/\mathbb{Q}}\big((n-1)a(\alpha+\varepsilon)\big) \\ &= (n-1)^n a^n N_{F/\mathbb{Q}}(\alpha+\varepsilon) \\ &= (n-1)^n a^n \cdot \big(\varepsilon^n + (-1)^{n-1}a\varepsilon + (-1)^n b\big) \\ &= (n-1)^n a^n \Big(\big(\frac{nb}{(n-1)a}\big)^n + (-1)^{n-1}a\frac{nb}{(n-1)a} + (-1)^n b\Big) \\ &= (nb)^n + (-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}nba^n + (-1)^n(n-1)^n a^n b \\ &= (nb)^n + (-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}ba^n \end{aligned}$$

und daraus folgt mit (2.1) die Behauptung.

Speziell für ein Minimalpolynom

$$f(X) = X^3 + aX + b$$

eines primitiven Elements eines kubischen Zahlkörpers folgt

$$\Delta_{\mathbb{Z}[\alpha]} = -(27b^2 + 4a^3).$$

Der folgende Satz gibt Hilfestellung beim Auffinden einer $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathfrak{o}_F$.

**Satz 2.38** (Struktursatz)**.** *Sei $\alpha$ ein primitives, ganz algebraisches Element des Zahlkörpers $F$, und $[F:\mathbb{Q}] = n$. Dann gibt es $f_0 = 1, f_1(X), \dots, f_n(X) \in \mathbb{Q}[X]$ und natürliche Zahlen*

$$d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_{n-1}$$

*mit*

$$d_i f_i(X) \in \mathbb{Z}[X]$$

*und*

$$1, f_1(\alpha), \dots, f_{n-1}(\alpha)$$

*ist eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathfrak{o}_F$. Weiter gilt*

$$\Delta_{\mathbb{Z}[\alpha]} = (\prod_{i=1}^{n-1} d_i)^2 \Delta_F.$$

*Beweis.* Wir setzen für $i = 0, \dots, n-1$

$$M_i = \mathfrak{o}_F \cap \bigoplus_{e \le i} \mathbb{Q} \cdot \alpha^e,$$

das sind also die Elemente aus $\mathfrak{o}_F$, die als $\mathbb{Q}$-Polynom in $\alpha$ den Grad $\le i$ haben. Dann ist

$$\mathbb{Z} = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_{n-1} = \mathfrak{o}_F$$

eine aufsteigende ausschöpfende Filtrierung von $\mathfrak{o}_F$ durch abelsche Untergruppen.

Wir konstruieren nun induktiv $d_i$ und $f_i(X)$ mit

$$M_i = \langle f_0(\alpha), \dots, f_i(\alpha)\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Der Anfang ist klar: $M_0 = \mathbb{Z} = \langle 1\rangle_{\mathbb{Z}}$. Weiter betrachten wir die Projektion $\mathrm{pr}_i$ auf den Koeffizienten von $\alpha^i$ in der exakten Sequenz

$$0 \to M_{i-1} \to M_i \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} \mathbb{Q}.$$

Da $\mathrm{pr}_i(\alpha^i) = 1 \in \mathrm{im}(\mathrm{pr}_i)$ eine endlich erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Q}$ ist, folgt leicht, daß es eine natürliche Zahl $d_i > 0$ mit

$$\mathrm{pr}_i(M_i) = \frac{1}{d_i}\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

gibt. Wir wählen

$$f_i(X) = \frac{1}{d_i}X^i + \text{ kleinere Grade}$$

so daß $f_i(\alpha) \in M_i$ ein Urbild von $1/d_i$ ist. Dann ist nach Konstruktion

$$\mathrm{pr}_i(\alpha f_{i-1}(\alpha)) = \frac{1}{d_{i-1}} \in \frac{1}{d_i}\mathbb{Z}$$

also $d_{i-1} \mid d_i$ wie behauptet. Ebenso folgt aus der exakten Sequenz sofort

$$M_i = \langle M_{i-1}, f_i(\alpha)\rangle_{\mathbb{Z}} = \langle f_0(\alpha), \dots, f_i(\alpha)\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Es bleibt zu zeigen, daß $d_i f_i(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Dazu betrachten wir

$$\frac{d_i}{d_{i-1}} f_i(\alpha) - f_{i-1}(\alpha)\alpha \in M_{i-1}$$

was per Induktion nur noch Teiler von $d_{i-1}$ als Nenner hat. Damit ist per Induktion

$$d_i f_i(X) = d_{i-1}\Big(\frac{d_i}{d_{i-1}} f_i(X) - f_{i-1}(X)X\Big) + d_i f_{i-1}(X)X \in \mathbb{Z}[X],$$

was zu zeigen war.

Die Aussage über die Diskriminanten folgt aus Proposition 2.30 und der Determinante des Basiswechsels von $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ zu $1, f_1(\alpha), \dots, f_{n-1}(\alpha)$, welche als Diagonalterme genau die $d_i$ hat. □

2.7. **Algebraische Struktur von Ordnungen.** Für manche algebraische Fragen ist es nötig, eine $\mathbb{Z}$-Algebra durch Erzeuger und Relationen darstellen zu können. Unsere Definition des Ganzzahlrings liefert dies nicht.

**Proposition 2.39.** *Sei $F$ ein Zahlkörper und $\alpha \in f_F$ ein ganzes Element. Sei $f(X) = P_{\alpha/\mathbb{Q}}(X) \in \mathbb{Z}[X]$ das Minimalpolynom von $\alpha$. Dann induziert die Auswertung in $X = \alpha$ einen Ringisomorphismus*

$$\mathbb{Z}[X]/(f(X)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\alpha].$$

*Beweis.* Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, daß $F = \mathbb{Q}(\alpha)$. Dann ist $\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq F$ eine Ordnung und als abelsche Gruppe frei vom Rang $n = [F : \mathbb{Q}] = \deg(f)$.

Weil $f(X)$ normiert ist, wird $\mathbb{Z}[X]/(f(X))$ von den Monomen $X^i$ mit $0 \le i \le n-1$ als abelsche Gruppe erzeugt. Genauer ist

$$\bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z} \cdot X^i \simeq \mathbb{Z}[X]/(f(X))$$

als abelsche Gruppe, weil kein Polynom vom Grad $< \deg(f)$ in $\mathbb{Z}[X]$ ein Vielfaches von $f(X)$ sein kann. Daher ist $\mathbb{Z}[X]/(f(X))$ auch eine freie abelsche Gruppe vom Rang $n = [F : \mathbb{Q}]$.

Die Auswertung ist per Definition surjektiv. Es bleibt die Frage, warum die Auswertung injektiv ist. Dies kann man nach $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ für die entsprechende $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung von Vektorräumen

der Dimension $n$ beantworten. Aber bei Vektorräumen der gleichen Dimension ist surjektiv $\iff$ injektiv. Damit ist alles bewiesen. □

Wir konstruieren nun ein Beispiel für eine Maximalordnung $\mathfrak{o}_F$, die nicht von der Form $\mathbb{Z}[\alpha]$ ist.

*Beispiel* 2.40. Sei $p$ eine Primzahl $\equiv 1 \pmod 8$. Dann erzeugt

$$\omega = \frac{1+\sqrt{p}}{2}$$

den Ganzzahlring in $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$. Die Diskriminante ist $\delta_F = p$. Das Minimalpolynom von $\omega$ ist

$$X^2 - X + \frac{1-p}{4}.$$

Es gilt

$$\mathfrak{o}_F/2\mathfrak{o}_F \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + \tfrac{1-p}{4}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_2[X]/(X^2 - X + \tfrac{1-p}{4}) = \mathbb{F}_2[X]/(X(X-1)) = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2.$$

Der letzte Isomorphismus kommt von der Auswertung in 0 für den einen und in $1 \in \mathbb{F}_2$ für den anderen Faktor.

Sei nun $q \neq p$ eine weitere Primzahl $\equiv 1 \pmod 8$. Dann haben die beiden quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ zueinander teilerfremde Diskriminante. Sei $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ das Kompositum. Den Ganzzahlring $\mathfrak{o}_F$ berechnet man nun mittels Satz 2.35. Insbesondere interessiert uns

$$\begin{aligned}
\mathfrak{o}_F/2\mathfrak{o}_F &= \mathfrak{o}_F \otimes \mathbb{F}_2 = (\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}(\sqrt{p})} \otimes \mathfrak{o}_{\mathbb{Q}(\sqrt{q})}) \otimes \mathbb{F}_2 \\
&= (\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}(\sqrt{p})} \otimes \mathbb{F}_2) \otimes_{\mathbb{F}_2} (\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}(\sqrt{q})} \otimes \mathbb{F}_2) \\
&= (\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2) \otimes_{\mathbb{F}_2} (\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2) \\
&= \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2.
\end{aligned}$$

Jetzt nehen wir an, daß mit einem geeigneten $\alpha \in \mathfrak{o}_F$ gilt: $\mathfrak{o}_F = \mathbb{Z}[\alpha]$. Sei $f(X)$ das Minimalpolynom von $\alpha$. Dann ist

$$\mathfrak{o}_F/2\mathfrak{o}_F \simeq \mathbb{Z}[X]/(f(X)) \otimes \mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_2[X]/(f(X))$$

ein Quotient von $\mathbb{F}_2[X]$. Dieser besteht aus 4 Faktoren $\mathbb{F}_2$. Die mutmaßliche Surjektion

$$\mathbb{F}_2[X] \twoheadrightarrow \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$$

entspricht Koordinatenweise der Auswertung von $X$ in einem Element $a_i \in \mathbb{F}_2$. Sind zwei der $a_i$ gleich, kann der Ringhomomorphismus nicht surjektiv sein, denn die Werte in den entsprechenden Faktoren sind stets gleich. Nun hat $\mathbb{F}_2$ nur 2 Elemente. Wir sind mit 4 verschiedenen Faktoren somit überfordert. Folglich kann $\mathfrak{o}_F$ nicht von der Form $\mathbb{Z}[\alpha]$ sein.

## 3. Dedekindringe

3.1. **Ganzzahlringe sind Dedekindringe.** Dedekindringe sind nach Hauptidealringen die nächst komplizierteren kommutativen Ringe. Lokal sind sie nichts anderes als Hauptidealringe.

**Definition 3.1.** Ein **Dedekindring** ist ein noetherscher Integritätsring der Dimension 1, der in seinem Quotientenkörper ganz abgeschlossen ist.

Wir erinnern an die Definition der (Krull-)Dimension eines Rings.

**Definition 3.2.** Die **(Krull-)Dimension** eines Rings $R$ ist

$$\dim(R) = \sup\{n \ ; \text{ es gibt eine Kette } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n \text{ von Primidealen in } R\}.$$

*Beispiel* 3.3. Ein Hauptidealring, der kein Körper ist, ist ein Dedekindring, zum Beispiel $\mathbb{Z}$ oder der Polynomring $k[X]$ über einem Körper $k$ sind Dedekindringe. In der Tat sind Hauptidealringe

- noethersch: jedes Ideal ist von einem Element erzeugt.
- ganz abgeschlossen im Quotientenkörper: Hauptidealringe sind faktoriell und damit normal, Beispiel 2.9.
- Und Hauptidealringe haben Dimension 1, sofern sie kein Körper sind. Primideale sind (0) oder von einem Primelement $\pi$ erzeugt. Eine maximale Primidealkette sieht daher so aus: $(0) \subsetneq \mathfrak{p} = (\pi)$. Damit ist die Dimension 1.

**Satz 3.4.** *Sei $F$ ein Zahlkörper. Dann ist $\mathfrak{o}_F$ ein Dedekindring.*

*Beweis.* Da $\mathbb{Z}$ als Hauptidealring ein Dedekindring ist, folgt dies sofort aus dem allgemeineren folgenden Satz. □

**Satz 3.5.** *Sei $A$ ein Dedekindring mit Quotientenkörper $K$ und $L/K$ eine endliche separable Erweiterung. Sei $B$ der ganze Abschluß von $A$ in $L$.*
*Dann ist $B$ ein Dedekindring mit Quotientenkörper $L$.*

*Beweis.* Korollar 2.11 zeigt, daß $B$ eine $K$-Basis von $L$ enthält und daher ist $L$ der Quotientenkörper von $B$. Als Unterring eines Körpers ist $B$ ein Integritätsring. Per Definition als ganzer Abschluß in $L$ und, weil ganz zu sein transitiv ist, ist $B$ ganz abgeschlossen in $L$.

Weil $L/K$ endlich separabel ist, zeigt Korollar 2.24, daß $B$ als $A$-Modul ein Untermodul eines freien $A$-Moduls vom Rang $[L : K]$ ist. Weil $A$ nothersch ist, ist damit $B$ als $A$-Modul noethersch. Jedes Ideal $\mathfrak{b} \subseteq B$ ist insbesondere ein $A$-Untermodul und als solcher endlich erzeugt (mit Koeffizienten aus $A$). Damit ist $\mathfrak{b}$ aber auch als $B$-Modul endlich erzeugt, also ein endlich erzeugtes Ideal. Somit ist $B$ noethersch.

Jetzt zeigen wir, daß $\dim(B) = 1$. Wenn $\dim(B) = 0$, dann ist $B$ selbst ein Körper und somit gleich $L$, siehe Proposition 2.10. Damit ist aber auch $K \subseteq L$ ganz über $A$. Weil $A$ ganzabgeschlossen in $K$ ist, folgt $A = K$ und $\dim(A) = 0$, ein Widerspruch.

Jetzt müssen wir nur noch $\dim(B) \leq 1$ zeigen. Als Integritätsring hat $B$ das Primideal (0). Dies ist das einzige minimale Primideal in $B$. Wir müssen zeigen, daß jedes Primideal $(0) \neq \mathfrak{q} \subseteq B$ schon ein maximales Ideal ist. Sei nun $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$. Dann ist die induzierte Abbildung

$$A/\mathfrak{p} \hookrightarrow B/\mathfrak{q}$$

injektiv, also $A/\mathfrak{p}$ ein Integritätsring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $A$.

Sei $0 \neq y \in \mathfrak{q}$ und sei $f(X) = X^d + a_1 X^{d-1} + \ldots + a_d \in A[X]$ ein Ganzheitspolynom für $y$. Weil $B$ ein Integritätsring ist, dürfen wir annehmen, daß $a_d \neq 0$. Dann ist

$$a_d = -y \cdot \left(y^{d-1} + a_1 y^{d-2} + \ldots + a_{d-1}\right) \in \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$$

somit $\mathfrak{p} \neq (0)$.

Weil $\dim(A) = 1$ gilt, muß $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal sein, und $k = A/\mathfrak{p}$ ist ein Körper. Weil $B$ ein endlicher $A$-Modul ist, wird auch $B/\mathfrak{q}$ als $A/\mathfrak{p}$-Modul endlich erzeugt. Damit ist $B/\mathfrak{q}$ ein Integritätsring und eine $k$-Algebra, die ein endlich dimensionaler $k$-Vektorraum ist. Nach dem folgenden Lemma ist $B/\mathfrak{q}$ ein Körper und $\mathfrak{q}$ deshalb ein maximales Ideal. □

**Lemma 3.6.** *Sei $k$ ein Körper, $R$ eine $k$-Algebra, die ein Integritätsring ist und als $k$-Vektorraum endlich dimensional ist. Dann ist $R$ ein Körper.*

*Beweis.* Wir müssen zeigen, daß alle $0 \neq x \in R$ ein Inverses haben. Die Multiplikation

$$x\cdot : R \to R$$

ist injektiv, weil $R$ ein Integritätsring ist und außerdem in $\mathrm{End}_k(R)$. Für endlich dimensionale $k$-Vektorräume sind injektive Endomorphismen automatisch bijektiv, also surjektiv. Also gibt es ein $y \in R$ mit $xy = 1$. □

*Bemerkung* 3.7. Der Satz von Krull–Akizuki besagt, daß Satz 3.5 auch für beliebige endliche Erweiterungen $L/K$ gilt, die nicht notwendig separabel sind. Die Schwierigkeit hierbei liegt in dem Nachweis, daß der ganze Abschluß $B$ von $A$ wieder noethersch ist. Im Gegensatz zum separablen Fall muß nämlich $B$ im Allgemeinen kein endlich erzeugter $A$-Modul sein.

*Bemerkung* 3.8. Sei $F$ ein Zahlkörper und $\mathfrak{o} \subseteq F$ eine Ordnung. Dann ist $\mathfrak{o}$ ein Dedekindring genau dann, wenn $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_F$ die Maximalordnung ist. Klar, nur $\mathfrak{o}_F$ ist in $F$ ganzabgeschlossen.

Mit $\mathfrak{o}_F$ teilt $\mathfrak{o}$ die Eigenschaften

- Integritätsring: als Unterring eines Körpers,
- noethersch: als Untergruppe von $\mathfrak{o}_F$ ist $\mathfrak{o}$ eine endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Algebra, also noethersch,
- $\dim(\mathfrak{o}) = 1$: selber Beweis wie für $\mathfrak{o}_F$.

Die Primideale von $\mathbb{Z}$ sind gerade $(0)$ und alle $(p)$ mit $p$ eine Primzahl.

**Korollar 3.9.** *Sei $F$ ein Zahlkörper. Ein von $0$ verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}_F$ enthält genau eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$, welche durch*

$$(p) = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$$

*charakterisiert ist. Der Restklassenring $\kappa(\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}$ ist eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$, und damit ein endlicher Körper mit*

$$N(\mathfrak{p}) := \#\kappa(\mathfrak{p}) = (\mathfrak{o}_F : \mathfrak{p}) = p^{\dim_{\mathbb{F}_p}(\kappa(\mathfrak{p}))}$$

*Elementen.*

*Beweis.* Das ergibt sich sofort aus dem Beweis von Satz 3.5 im Spezialfall von $\mathfrak{o}_F$ als Erweiterung von $\mathbb{Z}$. □

3.2. **Diskrete Bewertungsringe.** Das Konzept der Nullstellen- und Polordnung wird durch den Begriff der diskreten Bewertung abstrahiert.

**Definition 3.10.** Eine **diskrete Bewertung** eines Körpers $K$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphsimus

$$v : K^\times \twoheadrightarrow \mathbb{Z},$$

so daß für alle $x, y \in K^\times$ mit $x + y \neq 0$ gilt

$$v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}.$$

Elemente $\pi \in K^\times$ mit $v(\pi) = 1$ heißen **uniformisierende Elemente** von $v$.

Die folgenden Beispiele sind für uns die wichtigsten.

*Beispiel* 3.11. (1) Sei $p$ eine Primzahl aus $\mathbb{Z}$. Wir definieren die $p$-adische Bewertung auf $\mathbb{Q}$ durch

$$v_p : \mathbb{Q}^\times \to \mathbb{Z}$$
$$v_p(p^n \frac{a}{b}) = n \text{ wenn } p \nmid ab.$$

Diese $p$-adische Bewertung zählt die Faktoren $p$ in einer rationalen Zahl. Sie ist wohldefiniert und ein Homomorphismus aufgrund der eindeutigen Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}$. Die nötige Abschätzung gilt, weil die Summe mindestens durch die Primpotenz teilbar ist, durch die beide Summanden teilbar sind.

(2) Hier ist die abstrakte Variante. Sei $R$ ein Ring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung, also etwa ein Hauptidealring wie $\mathbb{Z}$ oder $k[T]$ für einen Körper $k$. Sei $\pi \in R$ ein Primelement und $K = \mathrm{Quot}(R)$. Dann gibt es für jedes $x \in K^\times$ eindeutig

$$x = \pi^n \frac{y}{z}$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ und $y, z \in R$, wobei $\pi$ kein Teiler von $y$ und $z$ ist. Die $\pi$-(adische) Bewertung auf $K$ ist gegeben durch

$$v_\pi : K^\times \to \mathbb{Z}$$
$$v_\pi(\pi^n \frac{y}{z}) = n \text{ wenn } \pi \nmid yz.$$

Wie im Spezialfall $R = \mathbb{Z}$ und $\pi = p$ folgt alles sofort: wohldefiniert, Gruppenhomomorphismus, Abschätzung der Teilbarkeitsordnung.

(3) Das abstrakte Beispiel liefert konkret für $R = k[T]$ und $\pi = T$ die Bewertung

$$\mathrm{ord}_0 : k(T)^\times \to \mathbb{Z}$$

welches jeder rationalen Funktion die Nullstellenordnung in $T = 0$ zuordnet.

**Lemma 3.12.** *Sei $v$ eine diskrete Bewertung auf dem Körper $K$. Dann gilt für alle $x \in K^\times$:*
*(1)* $v(-x) = v(x)$, *insbesondere* $v(-1) = 0$.
*(2)* $v(1/x) = -v(x)$.

*Beweis.* Es gilt $2v(-1) = v((-1)^2) = v(1) = 0$ in $\mathbb{Z}$, also $v(-1) = 0$. Der Rest ist noch trivialer. □

**Proposition 3.13** (Nicht-archimedische Dreiecksungleichung)**.** *Sei $v$ eine diskrete Bewertung auf dem Körper $K$. Dann gilt für $x, y, x + y \in K^\times$, wenn*

$$v(x) \neq v(y),$$

*genauer*

$$v(x + y) = \min\{v(x), v(y)\}.$$

*Beweis.* Wir zeigen, daß für $a, b, c \in K^\times$ mit $a + b + c = 0$ das Minimum von

$$\{v(a), v(b), v(c)\}$$

mindestens doppelt angenommen wird. Daraus folgt mit $a = x$, $b = y$ und $c = -(x + y)$ die Behauptung.

Angenommen, das Minimum wird nur einmal angenommen. Dann gilt oBdA

$$v(a) < v(b), v(c)$$

und dann ist

$$v(a) = v(-a) = v(b + c) \geq \min\{v(b), v(c)\} > v(a)$$

ein Widerspruch. □

**Proposition 3.14.** *Sei $v$ eine diskrete Bewertung auf dem Körper $K$. Dann gilt:*
*(1) Die Menge*

$$R = \{x \in K^\times \ ; \ v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$$

*ist ein Unterring von $K$ mit $K = \mathrm{Quot}(R)$, genannt der* ***Bewertungsring*** *von $v$.*
*(2) Die Einheitengruppe von $R$ ist*

$$R^\times = \{x \in K^\times \ ; \ v(x) = 0\}.$$

*(3) Der Ring $R$ ist ein Hauptidealring mit einem bis auf Einheiten eindeutigen Primelement. Die Primelemente sind genau die Uniformisierenden der Bewertung $v$.*
*(4) Der Ring $R$ hat ein eindeutiges maximales Ideal*

$$\mathfrak{m} = \{x \in K^\times \ ; \ v(x) > 0\} \cup \{0\},$$

*und dieses wird von $\pi$ erzeugt, wenn $\pi$ uniformisierendes Element ist.*

*(5) Der Faktorring $k = R/\mathfrak{m}$ ist ein Körper, genannt der* ***Restklassenkörper*** *von $v$.*

*Beweis.* (1) Nach der Dreiecksungleichung gilt mit $x, y \in R$ auch $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\} \geq 0$, also $x + y \in R$ (wenn $x + y = 0$, so ist das trivial). Da $x, y \in R$ auch $xy \in R$ impliziert, und wegen $1^2 = 1$ notwendig $v(1) = 0$, ist $R$ in der Tat ein Unterring.

Ein $x \in R$ ist eine Einheit, genau dann, wenn es ein $y \in R$ gibt mit $xy = 1$. Da

$$v(y) = v(1) - v(x) = -v(x)$$

geht das genau dann, wenn $v(x) = 0$ ist. Dann hat $y = 1/x \in K$ auch Bewertung 0 und ist in $R$. Dies zeigt (2).

Sei $\pi$ eine Uniformisierende, also $v(\pi) = 1$. Dann setzen wir für $x \in K^\times$

$$y = x/\pi^{v(x)}$$

finden $v(y) = v(x) - v(x) \cdot v(\pi) = 0$. Demnach ist $y \in R^\times$ und

$$x = \pi^{v(x)} y.$$

Es folgt, daß $K$ der Quotientenkörper von $R$ ist. Damit ist nun (1) gezeigt.

(3) Sei $I \subseteq R$ ein Ideal. Wir setzen

$$n = v(I) = \min\{m \ ; \ \text{ es gibt } x \in I \text{ mit } v(x) = m\}.$$

Das Minimum existiert, denn es handelt sich um das Minimum einer Teilmenge von $\mathbb{N}_0$. Außerdem wird das Minimum angenommen. Sei $x \in I$ ein solches Element mit $v(x) = n$. Dann ist für jedes $y \in I$ mit $z = y/x$

$$v(z) = v(y) - v(x) \geq 0,$$

also $z \in R$ und

$$y = xz \in (x).$$

Wir schließen $I = (x)$ und $R$ ist Hauptidealring.

Sei $\pi$ eine Uniformisierende von $v$. Jede Nichteinheit $x \in R$ hat $v(x) > 0$ und wird daher durch $\pi$ geteilt. Damit ist $\pi$ das einzige mögliche Primelement (bis auf Einheit). In der Tat ist $\pi$ irreduzibel, da $x, y \in R$ mit $xy = \pi$ erzwingt

$$1 = v(\pi) = v(x) + v(y),$$

und $v(x), v(y)$ sind 0 und 1 in einer Reihenfolge. Nach (2) ist somit ein Faktor eine Einheit.

(4) Man sieht sofort wie in (3), daß

$$\mathfrak{m} = (\pi).$$

Da $R \setminus \mathfrak{m} = R^\times$ nur aus Einheiten besteht und ein echtes Ideal keine Einheiten enthalten darf, ist jedes Ideal in $\mathfrak{m}$ enthalten. Damit ist $\mathfrak{m}$ das eindeutige maximale Ideal von $R$.

(5) Der Faktorring $k = R/\mathfrak{m}$ ist ein Körper, weil $\mathfrak{m}$ maximal ist. □

*Beispiel* 3.15. Der Potenzreihenring $K[[T]]$ über einem Körper $K$ ist ein Hauptidealring mit genau einem Primelement $T$ (bis auf Multiplikation mit einer Einheit). Die $T$-Bewertung auf $K((T)) := \mathrm{Quot}(K[[T]])$ wird gegeben durch

$$\begin{aligned} v : K((T))^\times &\to \mathbb{Z} \\ v(\sum_{i \geq 0} a_i T^i) &\mapsto \min\{i \ ; \ a_i \neq 0\} \end{aligned}$$

Der zugehörige Bewertungsring ist $K[[T]]$, das maximale Ideal besteht aus den Potenzreihen mit konstantem Element 0 und der Restklassenkörper ist als Quotient

$$\begin{aligned} K[[T]] &\to K \\ f &\mapsto f(0), \end{aligned}$$

die einzige Auswertung von $T$ in $K$, die sinnvoll ist.

Insbesondere folgt aus diesen Überlegungen, daß

$$K((T)) = \{f = \sum_{i \geq n} a_i T^i \ ; \ n \in \mathbb{Z}, a_i \in K\} = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n} K[[T]]$$

gilt. Der Quotientenkörper des formalen Potenzreihenrings ist somit der formale Laurentreihenring (mit endlicher Polordnung).

**Satz 3.16.** *Sei $R$ ein Ring. Dann sind äquivalent:*

*(a)* *$R$ ist ein diskreter Bewertungsring.*

*(b)* *$R$ ist ein Hauptidealring mit nur einem nichttrivialen Primideal.*

*(c)* *$R$ ist lokaler noetherscher Integritätsring mit maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (\pi)$ erzeugt von einem nicht-nilpotenten Element.*

*Bemerkung* 3.17. Die Eigenschaften von Satz 3.16 sind auch äquivalent zur folgenden Abschwächung von (c):

(c') $R$ ist lokaler noetherscher Ring mit maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (\pi)$ erzeugt von einem nicht-nilpotenten Element.

Das kann (und soll man) in [Ser79] nachlesen.

*Beweis von Satz 3.16.* (a) $\Longrightarrow$ (b) haben wir in Proposition 3.14 gesehen. (b) $\Longrightarrow$ (c) ist trivial.

(c) $\Longrightarrow$ (a): Es ist $\mathfrak{m}^n = (\pi^n)$. Wir zeigen zuerst elementar den Krull'sche Durchschnittssatz im Spezialfall von $R$:

$$\bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n = (0).$$

Sei $f \neq 0$ im Schnitt. Dann gibt es $0 \neq x_n \in R$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$f = x_n \cdot \pi^n.$$

Dann ist

$$\pi^n(x_n - \pi x_{n+1}) = \pi^n x_n - \pi^{n+1} x_{n+1} = f - f = 0$$

somit $x_n = \pi \cdot x_{n+1}$. Damit haben wir eine aufsteigenden Kette von Idealen

$$(x_1) \subseteq \ldots \subseteq (x_n) \subseteq (x_{n+1}) \subseteq \ldots$$

Diese wird wegen noethersch stationär. Für $n \gg 0$ gilt also $x_{n+1} \in (x_n)$, d.h., es gibt $a_n \in R$ mit

$$x_{n+1} = a_n x_n = a_n(\pi x_{n+1}) = (a_n \pi) x_{n+1},$$

also $a_n \pi = 1$ und $\pi$ ist Einheit. Damit gilt $R = (\pi) = \mathfrak{m}$, Widerspruch.

Nun können wir schließen, daß

$$R \supseteq \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}^2 \supseteq \ldots \supseteq \bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n = (0),$$

d.h. für jedes $0 \neq x \in R$ existiert ein eindeutiges $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$x \in \mathfrak{m}^n \setminus \mathfrak{m}^{n+1}.$$

Weil $\mathfrak{m} = (\pi)$ Hauptideal ist, gibt es somit $u \in R$ mit

$$x = u \cdot \pi^n$$

aber weil $x \notin \mathfrak{m}^{n+1}$ muß $u \in R \setminus \mathfrak{m} = R^\times$ eine Einheit sein.

Die Zuordnung $x \mapsto n$ mit $x = u \cdot \pi^n$ und $u \in R^\times$ ist die gesuchte diskrete Bewertung (wenn man sie auf den Quotientenkörper in der offensichtlichen Weise als Differenz von Zähler und Nenner fortsetzt). □

**Theorem 3.18.** *Sei $R$ ein Ring. Dann sind äquivalent:*
*(a)* *$R$ ist diskreter Bewertungsring.*
*(b)* *$R$ ist Hauptidealring mit nur einem nichttrivialen Primideal.*
*(c)* *$R$ ist lokaler Dedekindring.*
*(d)* *$R$ ist normaler, noetherscher Integritätsring mit genau einem von $(0)$ verschiedenen Primideal.*

*Beweis.* (a) $\Longrightarrow$ (b) haben wir in Proposition 3.14 gesehen.

(b) $\Longrightarrow$ (c): Ein Hauptidealring, der kein Körper ist, ist ein Dedekindring. Ein Hauptidealring mit genau einem nichttrivialen Primideal ist ein lokaler Ring.

(c) $\Longrightarrow$ (d): In einem lokalen Dedekindring $(R, \mathfrak{m})$ gibt es die Primideale $(0) \subsetneq \mathfrak{m}$. Alle anderen Primideale wären echt dazwischen und führten zu $\dim(R) > 1$. Also gibt es nur $(0)$ und $\mathfrak{m}$. Der Rest ist offensichtlich für einen Dedekindring.

(d) $\Longrightarrow$ (a): Jedes maximale Ideal ist Primideal. Wenn es nur $(0)$ und ein weiteres Primideal $\mathfrak{m}$ gibt, dann kann es neben $\mathfrak{m}$ keine weiteren maximalen Ideale geben. Somit ist $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring. Nach Satz 3.16 reicht es nun zu zeigen, daß $\mathfrak{m}$ ein Hauptideal ist.

Sei $K$ der Quotientenkörper von $R$ und

$$\mathfrak{m}' = \{x \in K \ ; \ x\mathfrak{m} \subseteq R\}.$$

Dann gilt $1 \in \mathfrak{m}'$ und

$$\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}' \cdot \mathfrak{m} := \{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ ; \ x_i \in \mathfrak{m}', y_i \in \mathfrak{m}\} \subseteq R.$$

Das Ideal $I = \mathfrak{m}' \cdot \mathfrak{m}$ ist also entweder $\mathfrak{m}$ oder $R$.

*Fall 1:* $I = \mathfrak{m}$. Dieser Fall führt nach einigen Schritten zu einem Widerspruch.

*Schritt 1*: Wenn $I = \mathfrak{m}$, dann definiert

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}' &\to \mathrm{End}_R(\mathfrak{m}) \\ x &\mapsto (y \mapsto xy) \end{aligned}$$

eine treue Operation auf einem endlich erzeugten $R$-Modul. Nach dem Determinantentrick sind die Elemente aus $\mathfrak{m}'$ ganz über $R$. Weil $R$ normal ist, folgt $\mathfrak{m}' \subseteq R$ und daher $\mathfrak{m}' = R$.

*Schritt 2*: Für jedes $0 \neq y \in \mathfrak{m}$ ist der Ring (Lokalisierung an Potenzen von $y$)

$$R_y = \{z \in K \ ; \ \exists n \in \mathbb{N}, x \in R : z = \frac{x}{y^n}\} \subseteq K$$

bereits gleich $K$. Dafür reicht es, zu zeigen, daß $R_y$ ein Körper ist. Angenommen, $R_y$ ist kein Körper. Dann gibt es ein Primideal $(0) \neq \mathfrak{q} \subseteq R_y$. In $R_y$ ist $y$ invertierbar, also $y \notin \mathfrak{q}$. Sei $0 \neq z \in \mathfrak{q}$. Dann wählen wir $x \in R$ und $n \in \mathbb{N}_0$ mit $z = \frac{x}{y^n}$. Insbesondere ist $x = y^n z \in \mathfrak{q}$.

Der Schnitt $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$ ist ein Primideal mit $y \notin \mathfrak{p}$ und $x \in \mathfrak{p}$. Von den zwei Primidealen $(0)$ und $\mathfrak{m}$ von $R$ kommt damit für $\mathfrak{p}$ keines in Frage! Dies ist ein Widerspruch, und dies zeigt $R_y = K$.

*Schritt 3*: Wir wählen nun $0 \neq z \in \mathfrak{m}$ beliebig. Sei $\mathfrak{m} = (y_1, \ldots, y_r)$. Dann gibt es nach Schritt 1 Elemente $x_i \in R$ und $n \in \mathbb{N}$ (unabhängig von $i$) mit

$$\frac{1}{z} = \frac{x_i}{y_i^n},$$

also $y_i^n = x_i z \in (z)$ für alle $i = 1, \ldots, r$. Daher gilt für $N \gg 0$

$$\mathfrak{m}^N \subseteq (z).$$

*Schritt 4*: Sei nun $N$ minimal mit $\mathfrak{m}^N \subseteq (z)$. Weil $z \in \mathfrak{m}$ gilt $N \geq 1$. Insbesondere gibt es

$$y \in \mathfrak{m}^{N-1} \setminus (z).$$

Dann folgt

$$y \cdot \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^N \subseteq (z),$$

also $\frac{y}{z} \in \mathfrak{m}' = R$ im Widerspruch zu $y \notin (z)$. Fall 1 tritt also nicht auf.

*Fall 2:* $I = R$. Dann ist $1 \in R = \mathfrak{m}' \cdot \mathfrak{m}$ und es gibt $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}'$ und $y_1, \ldots, y_r \in \mathfrak{m}$ mit

$$1 = \sum_{i=1}^{r} x_i y_i.$$

Jeder der Summanden $x_i y_i \in R$ und nicht alle sind in $\mathfrak{m}$, denn sonst könnte ihre Summe nicht 1 sein. Es gibt also ein $i$ mit $u_i = x_i y_i \in R^\times$. Wir setzen $x = u_i^{-1} x_i \in \mathfrak{m}'$ und $y = y_i \in \mathfrak{m}$, so daß

$$xy = 1.$$

Für ein beliebiges $z \in \mathfrak{m}$ gilt dann

$$z = z(xy) = (zx)y \in (y),$$

weil $zx \in \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}' = R$. Damit ist $\mathfrak{m} = (y)$ ein Hauptideal. □

3.3. **Lokalisieren von Ringen, Moduln, Idealen und Algebren.** Lokalisieren ist eine Standardtechnik der kommutativen Algebra.

**Definition 3.19.** Eine **multiplikative** (oder genauer eine **multiplikativ abgeschlossene**) Teilmenge eines Rings $R$ ist eine Teilmenge $S \subseteq R$ mit

(i) $1 \in S$,

(ii) für alle $s, t \in S$ ist $st \in S$.

Synonym verwenden wir auch die Bezeichnung **multiplikatives System** für eine multiplikative Teilmenge.

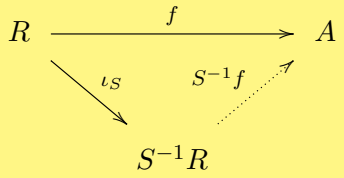
**Satz 3.20** (Existenz und Eindeutigkeit der Lokalisierung)**.** *Sei $R$ ein Ring und $S \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Dann gibt es eine $R$-Algebra*

$$\iota_S : R \to S^{-1}R$$

*mit den folgenden Eigenschaften.*

*(i)* $\iota_S(S) \subseteq (S^{-1}R)^\times$,

*(ii)* *für jede $R$-Algebra $f : R \to A$ mit $f(S) \subseteq A^\times$ gibt es genau eine Faktorisierung $S^{-1}f$ wie im kommutativen Diagramm*




*Die $R$-Algebra $S^{-1}R$ ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.*

*Beweis.* Die Eindeutigkeitsaussage beweist sich rein formal aus den geforderten Eigenschaften von selbst. Der Gehalt des Satzes steckt in der Konstruktion eines solchen $\iota_S : R \to S^{-1}R$. Die Idee zur Konstruktion ist das formale *Bruchrechnen*. Wir definieren

$$S^{-1}R := R \times S / \sim$$

nach der Äquivalenzrelation

$$(a, s) \sim (b, t) \iff \text{es gibt } u \in S \text{ mit } u(at - bs) = 0.$$

Dies ist trivialerweise symmetrisch und reflexiv ist auch klar (mit $u = 1$). Transitiv sieht man wie folgt. Sei $(a, s) \sim (b, t)$, bezeugt durch $u \in S$ und $u(at - bs) = 0$, und sei $(b, t) \sim (c, r)$, bezeugt durch $v \in S$ und $v(br - ct) = 0$, dann ist $(a, s) \sim (c, r)$, weil $uvt \in S$ und

$$uvt(ar - cs) = vr(uat) - us(vct) = vr(ubs) - us(vbr) = 0.$$

Wir schreiben suggestiv

$$\frac{a}{s}$$

für die Äquivalenzklasse mit Vertreter $(a, s)$. Die Definition der Relation liest sich dann

$$\frac{a}{s} = \frac{uat}{ust} = \frac{ubs}{ust} = \frac{b}{t}$$

als bekannte Gleichung durch Erweitern und Kürzen von Brüchen.

Addition und Multiplikation auf $S^{-1}R$ definiert man wie für Brüche:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at + bs}{st}$$
$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} := \frac{ab}{st}.$$

Es ist eine Übungsaufgabe zu zeigen, daß dies aus $S^{-1}R$ einen Ring mit $1 = \frac{1}{1}$ und $0 = \frac{0}{1}$ macht. Die Abbildung $\iota_S : R \to S^{-1}R$

$$\iota_S(a) = \frac{a}{1}$$

ist offensichtlich ein Ringhomomorphismus. Sei $s \in S$. Wegen

$$\iota_S(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{s} = \frac{1}{1} = 1$$

schickt $\iota_S$ die Elemente von $S$ auf Einheiten von $S^{-1}R$.

Sei $f : R \to A$ ein Ringhomomorphimus wie in (ii). Da $S$ in $S^{-1}R$ auf Einheiten geht, kann $F = S^{-1}f$ höchstens dann existieren, wenn auch $f(S) \subseteq A^\times$ gilt. Dann definieren wir $F : S^{-1}R \to A$ durch

$$F(\frac{a}{s}) := f(a)f(s)^{-1}.$$

Dies ist eine wohldefinierte Abbildung, denn aus $a/s = b/t$ folgt mit $u \in S$ und $u(at - bs) = 0$

$$f(a)f(s)^{-1} = f(uat)f(ust)^{-1} = f(ubs)f(ust)^{-1} = f(b)f(t)^{-1}.$$

Außerdem ist $F$ ein Ringhomomorphismus: die Eins wird bewahrt

$$F(1) = F(1/1) = f(1)f(1)^{-1} = 1,$$

$F$ ist additiv

$$\begin{aligned} F(a/s + b/t) &= F((at + bs)/st) = f(at + bs)f(st)^{-1} \\ &= f(at)f(st)^{-1} + f(bs)f(st)^{-1} = F(a/s) + F(b/t), \end{aligned}$$

und multiplikativ

$$\begin{aligned} F(a/s \cdot b/t) &= F(ab/st) = f(ab)f(st)^{-1} \\ &= f(a)f(s)^{-1} \cdot f(b)f(t)^{-1} = F(a/s) \cdot F(b/t), \end{aligned}$$

Die in (ii) geforderte Faktorisierungseigenschaft gilt, da für alle $a \in R$

$$F(a/1) = f(a)f(1)^{-1} = f(a).$$

Die Definition von $F$ ist zudem die einzig mögliche, da

$$F(\frac{a}{s}) = F(\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{s}) = F(\iota_S(a)\iota_S(s)^{-1}) = F(\iota_S(a)) \cdot F(\iota_S(s))^{-1} = f(a)f(s)^{-1}.$$

Die verbleibenden Details der Beweise, insbesondere das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz in $S^{-1}R$, bleiben der geneigten Leserschaft zur Übung überlassen. □

*Bemerkung* 3.21. Die Bedingung (i) in Satz 3.20 zu fordern ist notwendig, weil sonst $\mathrm{id} : R \to R$ selbst auch (ii) löst und $S^{-1}R$ nicht mehr eindeutig ist.

*Beispiel* 3.22. (1) Sei $R$ ein Integritätsring. Dann ist $S = R \setminus \{0\}$ multiplikativ und

$$\mathrm{Quot}(R) = (R \setminus \{0\})^{-1}R$$

der Quotientenkörper. Aus der universellen Eigenschaft von Satz 3.20 folgt, daß insbesondere $R \to \mathrm{Quot}(R)$ den universellen injektiven Homomorphismus in einen Körper darstellt. Jede Einbettung $R \hookrightarrow K$ in einen Körper $K$ faktorisiert eindeutig zu $\mathrm{Quot}(R) \hookrightarrow K$. Der Quotientenkörper ist der kleinste Körper, der $R$ enthält.

(2) Seien $S$ und $T$ multiplikative Teilmengen des Rings $R$. Dann ist auch

$$ST = \{st \ ; \ s \in S, \ t \in T\}$$

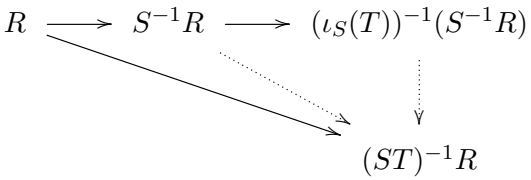
multiplikativ, und es gilt

$$(ST)^{-1}R = (\iota_S(T))^{-1}S^{-1}R$$

als $R$-Algebren. Das folgt sofort aus der universellen Eigenschaft: $ST$ ist in $(\iota_S(T))^{-1}S^{-1}R$ invertierbar, da $st$ invertierbar ist, wenn nur $s$ und $t$ invertierbar sind. Also gibt es

$$(ST)^{-1}R \to (\iota_S(T))^{-1}S^{-1}R$$
$$\frac{a}{st} \mapsto \frac{\frac{a}{s}}{t}.$$

Umgekehrt sind $S$ und $\iota_S(T)$ in $(ST)^{-1}R$ invertierbar, somit existieren eindeutig die punktierten Pfeile im Diagramm




Die nun konstruierte Abbildung ist die inverse Abbildung zur ersten.

(3) Sei $f \in R$ ein beliebiges Element. Dann ist

$$S_f := \{1, f, f^2, \ldots, f^n, \ldots\}$$

multiplikativ. Die Lokalisierung bezeichnen wir mit

$$R_f := R[\frac{1}{f}] := S_f^{-1}R.$$

In diesem Ring werden als Nenner nur Potenzen von $f$ zugelassen. Aus der universellen Eigenschaft bekommt man einen Isomorphismus

$$R_f = R[X]/(1 - Xf).$$

**Proposition 3.23.** *Sei $S$ eine multiplikative Teilmenge im Ring $R$. Dann ist*

$$\ker(R \to S^{-1}R) = \{a \in R \ ; \quad \textit{es gibt } s \in S \textit{ mit } sa = 0\}.$$

*Beweis.* $\iota_S(a) = 0$ bedeutet $\frac{a}{1} = \frac{0}{1}$, und das sagt, es gibt $s \in S$ mit $s(a \cdot 1 - 0 \cdot 1) = 0$. □

**Korollar 3.24.** *Sei $R$ ein Integritätsring und $S \subseteq R$ multiplikativ mit $0 \notin S$. Dann ist*

$$R \hookrightarrow S^{-1}R \hookrightarrow \mathrm{Quot}(R)$$

*injektiv.*

*Beweis.* Sofort aus Proposition 3.23, da in einem Integritätsring keine Nullteiler existieren. □

**Satz 3.25** (Lokalisierung von Moduln)**.** *Sei $R$ ein Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zu einem $R$-Modul $M$ gibt es einen $R$-Modulhomomorphismus $R \to S^{-1}R$ mit der Eigenschaft:*

*(i) für alle $t \in S$ ist die Multiplikation mit $t$ auf $S^{-1}M$ bijektiv,*

*(ii) für alle $R$-Modulhomomorphismen $\varphi : M \to N$, so daß alle $t \in S$ auf $N$ durch Multiplikation bijektiv operieren, gibt es eine eindeutige Fortsetzung $S^{-1}\varphi : S^{-1}M \to N$, also ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\ \varphi\ } & N \\ & \searrow \quad \nearrow_{S^{-1}\varphi} & \\ & S^{-1}M. & \end{array}$$

*Der Modulhomomorphismus $M \to S^{-1}M$ ist mit den angegebenen Eigenschaften eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.*

*Beweis.* Die Eindeutigkeit ist formal. Die Existenz wird durch die folgende Konstruktion gewährleistet. Es ist

$$S^{-1}M = M \times S/\sim$$

bezüglich der Äquivalenzrelation

$$(x, s) \sim (y, t) \iff \text{es gibt } u \in S : u(tx - sy) = 0.$$

Der Rest des Beweises verläuft parallel zum Beweis von Satz 3.20 und bringt keine neuen Erkenntnisse. □

*Bemerkung* 3.26. (1) Auf dem Modul $S^{-1}M$ operieren alle $t \in S$ bijektiv durch Multiplikation. Daher ist $S^{-1}M$ auf eindeutige Weise durch

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{x}{t} = \frac{ax}{st}$$

mit $a \in R$, $s, t \in S$ und $x \in M$ ein $S^{-1}R$-Modul.

(2) Die Lokalisierung an $S$ ist sogar ein Funktor. Auf Objekten haben wir $M \rightsquigarrow S^{-1}M$ konstruiert. Zu einem $R$-Modulhomomorphismus $\varphi : M \to N$ gehört wegen der universellen Eigenschaft von $S^{-1}M$ im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\ \varphi\ } & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^{-1}M & \xrightarrow{\ S^{-1}\varphi\ } & S^{-1}N \end{array}$$

der Pfeil $S^{-1}\varphi$ der Form

$$S^{-1}\varphi(\frac{x}{s}) = \frac{\varphi(x)}{s}.$$

Dieser ist eindeutig, sogar ein $S^{-1}R$-Modulhomomorphismus und offensichtlich funktoriell. Wir erhalten den Lokalisierungsfunktor auf Moduln

$$S^{-1} : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S^{-1}R)$$
$$M \mapsto S^{-1}M.$$

(3) Auch für Moduln ist das Lokalisieren transitiv. Seien $S, T \subseteq R$ multiplikativ. Dann ist natürlich

$$(ST)^{-1}M = T^{-1}(S^{-1}M).$$

**Satz 3.27.** *Sei $S$ ein multiplikatives System in einem Ring $R$. Dann gibt es für alle $M \in \mathrm{Mod}(R)$ einen natürlichen Isomorphismus*

$$S^{-1}M = M \otimes_R S^{-1}R.$$

*Beweis.* Da $S$ in $S^{-1}R$ auf Einheiten abgebildet wird, ist $M = M \otimes_R R \to M \otimes_R S^{-1}R$ ein $R$-Modulhomomorphismus in einen $R$-Modul, auf dem die Multiplikation mit allen $s \in S$ bijektiv ist. Aus der universellen Eigenschaft ergibt sich ein eindeutiger $R$- sogar $S^{-1}R$-Modulhomomorphismus

$$S^{-1}M \to M \otimes_R S^{-1}R$$
$$\frac{x}{s} \mapsto x \otimes \frac{1}{s}.$$

In die umgekehrte Richtung betrachten wir die $R$-bilineare Abbildung

$$M \times S^{-1}R \to S^{-1}M$$
$$(x, \frac{a}{s}) \mapsto \frac{ax}{s}.$$

Diese induziert nach der universellen Eigenschaft einen $R$- sogar $S^{-1}R$-Modulhomomorphismus

$$M \otimes_R S^{-1}R \to S^{-1}M$$
$$x \otimes \frac{a}{s} \mapsto \frac{ax}{s}.$$

Diese beiden Homomorphismen sind offensichtlich natürlich und invers zueinander. □

**Satz 3.28.** *Lokalisieren von Moduln ist ein exakter Funktor.*

*Beweis.* Sei $S$ ein multiplikatives System in einem Ring $R$ und sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von $R$-Moduln. Wir müssen zeigen, daß auch die induzierte Sequenz

$$0 \to S^{-1}M' \to S^{-1}M \to S^{-1}M'' \to 0$$

exakt ist. Da Lokalisieren ein Tensorprodukt $- \otimes_R S^{-1}R$ ist, folgt aus allgemeinen Gründen, daß Lokalisieren rechtsexakt ist. Wir müssen also nur zeigen, daß ein injektiver $R$-Modulhomomorphismus $i : M' \hookrightarrow M$ nach Lokalisieren immer noch injektiv ist.

Sei $y \in S^{-1}M'$ und $S^{-1}i(y) = 0 \in S^{-1}M$. Dann gibt es $x \in M'$ und $s \in S$ mit $y = \frac{x}{s}$, und

$$0 = S^{-1}i(y) = \frac{i(x)}{s}.$$

Weiter gibt es dann $u \in S$ mit $u(1 \cdot i(x) - s \cdot 0) = 0$, also $0 = ui(x) = i(ux)$. Da $i$ injektiv ist, folgt $0 = ux = u(1 \cdot x - s \cdot 0)$. Das bedeutet rückwärts, daß $y = \frac{x}{s} = 0 \in S^{-1}M'$. Damit ist $S^{-1}i$ injektiv. □

**Definition 3.29.** Ein **endlich präsentierter $R$-Modul** ist ein $R$-Modul $M$, für den es $n_1, n_0 \in \mathbb{N}_0$ und eine exakte $R$-Modulsequenz

$$R^{n_1} \xrightarrow{A} R^{n_0} \xrightarrow{p} M \to 0$$

gibt. Eine solche Sequenz nennt man eine **endliche Präsentation** von $M$.

*Bemerkung* 3.30. Eine endliche Präsentation wie in der Definition besagt, daß $M$ von $n_0$-vielen Elementen, den Bildern $x_i = p(e_i)$ für $i = 1, \ldots, n_0$ mit der Standardbasis $e_i$ von $R^{n_0}$ erzeugt werden kann. Weiter besagt die Präsentation, daß die $R$-linearen Relationen, die zwischen den $x_i$ in $M$ gelten, durch die $n_1$-vielen Relationen $A(e_j)$ mit $j = 1, \ldots, n_1$ erzeugt werden können. Wenn man $A$ durch eine Matrix beschreibt, dann sind die Koeffizienten der erzeugenden Relationen in den Spalten der Matrix abzulesen.

**Satz 3.31.** *Sei $M$ ein endlich präsentierter $R$-Modul und $S \subseteq R$ multiplikativ. Dann ist für alle $R$-Moduln $N$ die natürliche Abbildung*

$$S^{-1} \operatorname{Hom}_R(M, N) \to \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

*ein Isomorphismus von $S^{-1}R$-Moduln.*

*Beweis. Schritt 1:* Die Aussage ist trivialerweise wahr für $M = R$. Dann ist nämlich

$$\operatorname{Hom}_R(R, N) = N \quad \text{und} \quad \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R, S^{-1}N) = S^{-1}N$$

durch Auswertung bei 1 und die behauptete Abbildung nach dieser Identifizierung gleich der Identität.

*Schritt 2:* Wenn die Aussage für $R$-Moduln $M_1$ und $M_2$ anstelle von $M$ gilt, dann auch für $M = M_1 \oplus M_2$. In der Tat ist

$$S^{-1} \operatorname{Hom}_R(M_1 \oplus M_2, N) = \big(S^{-1} \operatorname{Hom}_A(M_1, N)\big) \oplus \big(S^{-1} \operatorname{Hom}_A(M_2, N)\big)$$

und

$$\operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}(M_1 \oplus M_2), S^{-1}N) = \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M_1, S^{-1}N) \oplus \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M_2, S^{-1}N)$$

und die Abbildung ist aufgrund ihrer Natürlichkeit mit der Aufspaltung als direkte Summe verträglich. Damit ist sie ein Isomorphismus genau dann, wenn sie komponentenweise ein Isomorphismus ist.

*Schritt 3:* Aus Schritt 1 und 2 folgt per Induktion die Aussage für $M = R^n$ und beliebige $n \in \mathbb{N}_0$.

*Schritt 4:* Wir wählen nun eine endliche Präsentation $R^{n_1} \to R^{n_0} \to M \to 0$. Auf diese Sequenz wenden wir zum einen die Funktoren $S^{-1} \operatorname{Hom}_R(-, N)$ und zum andern die Funktoren $S^{-1}(-)$ und $\operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(-, S^{-1}N)$ an. Aus den jeweiligen Exaktheitseigenschaften folgt das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & S^{-1} \operatorname{Hom}_R(M, N) & \longrightarrow & S^{-1} \operatorname{Hom}_R(R^{n_0}, N) & \longrightarrow & S^{-1} \operatorname{Hom}_R(R^{n_1}, N) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \beta_M} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{R^{n_0}}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{R^{n_1}}} \\
0 & \to & \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N) & \to & \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R^{n_0}, S^{-1}N) & \to & \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R^{n_1}, S^{-1}N)
\end{array}$$

mit exakten Zeilen. Die beiden rechten vertikalen Abbildungen sind nach Schritt 3 Isomorphismen. Damit ist es auch $\beta_M$ nach dem 5-er Lemma (man denke sich das Diagramm nach links durch Nullen fortgesetzt, um auf die 5 Spalten zu kommen). □

**Lemma 3.32.** *Sei $R$ ein Ring, $S \subseteq R$ ein multiplikatives System und $\iota : R \to A$ eine $R$-Algebra. Dann ist auch $\iota(S) \subseteq A$ ein multiplikatives System und*

$$S^{-1}A = \iota(S)^{-1}A.$$

*Das heißt, die Lokalisierung als $R$-Modul an $S$ und als Ring an $\iota(S)$ stimmen als $S^{-1}R$-Moduln überein. Insbesondere ist $S^{-1}A$ durch $S^{-1}\iota : S^{-1}R \to S^{-1}A$ eine $S^{-1}R$-Algebra.*

*Beweis.* Trivial durch Ausnutzen der jeweiligen universellen Eigenschaften, oder durch Vergleich der Konstruktion. □

**Proposition 3.33.** *Sei $R$ ein Ring und $S$ eine multiplikative Teilmenge.*

*(1) Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann ist $S^{-1}\mathfrak{a} \subseteq S^{-1}R$ ein Ideal.*

*(2) Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann haben wir einen Isomorphismus von $S^{-1}R$-Algebren*

$$S^{-1}R/S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}(R/\mathfrak{a}).$$

*(3) Jedes Ideal $\mathfrak{b} \subseteq S^{-1}R$ ist von der Form $S^{-1}\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$.*

*(4) Seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ Ideale von $R$. Dann gilt*

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \Longrightarrow S^{-1}\mathfrak{a}_1 \subseteq S^{-1}\mathfrak{a}_2.$$

*Beweis.* (1) Da Lokalisieren exakt ist, bleibt $S^{-1}\mathfrak{a} \hookrightarrow S^{-1}R$ injektiv. Außerdem sind Untermoduln von $S^{-1}R$ dasselbe wie Ideale.

Die Aussage (2) folgt aus der Exaktheit des Lokalisierens und Lemma 3.32 für die Interpretation als $S^{-1}R$-Algebren.

(3) Zum Ideal $\mathfrak{b} \subseteq S^{-1}R$ betrachten wir

$$\mathfrak{a} = \{x \in R \ ; \ \frac{x}{1} \in \mathfrak{b}\} = \iota_S^{-1}(\mathfrak{b}).$$

Als Urbild eines Ideals ist $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Außerdem gilt offensichtlich

$$S^{-1}\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}.$$

Wenn $\frac{x}{s} \in \mathfrak{b}$, dann ist $\frac{x}{1} = s \cdot \frac{x}{s} \in \mathfrak{b}$ und damit $x \in \mathfrak{a}$, oder $\frac{x}{s} \in S^{-1}\mathfrak{a}$. Es folgt $S^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

(4) ist klar. □

**Satz 3.34.** *Sei $R$ ein Ring und $S$ eine multiplikative Teilmenge. Die Lokalisierung an $S$ ist eine bijektive, inklusionserhaltende Abbildung*

$$S^{-1} : \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \ ; \ \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(S^{-1}R)$$
$$\mathfrak{p} \mapsto S^{-1}\mathfrak{p}.$$

*Die Umkehrabbildung wird durch $\mathfrak{q} \mapsto \iota_S^{-1}(\mathfrak{q})$ beschrieben.*

*Beweis.* Wenn $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal ist, dann ist der Faktorring zum Ideal $S^{-1}\mathfrak{p}$

$$S^{-1}R/S^{-1}\mathfrak{p} = S^{-1}(R/\mathfrak{p})$$

die Lokalisierung am Bild $\bar{S}$ von $S$ in $R/\mathfrak{p}$. Da $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsring ist, gilt dasselbe für die Lokalisierung, sofern $0 \notin \bar{S} \subseteq R/\mathfrak{p}$. Äquivalent dazu ist $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$. In diesem Fall ist $S^{-1}\mathfrak{p}$ ein Primideal und die Abbildung wohldefiniert.

Die Umkehrabbildung führt zu einem Ideal $\mathfrak{p} = \iota_S^{-1}(\mathfrak{q})$, so daß per Definition die induzierte Abbildung

$$R/\mathfrak{p} \hookrightarrow S^{-1}R/\mathfrak{q}$$

injektiv ist. Daher ist auch $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsring, und $\mathfrak{p}$ ist ein Primideal. Wenn $S \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$, dann wäre auch $S \cap \mathfrak{q} \neq \emptyset$ und $\mathfrak{q} = S^{-1}R$, Widerspruch. Die Umkehrabbildung ist also auch wohldefiniert.

Offensichtlich gilt $\mathfrak{p} \subseteq \iota_S^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p})$. Wenn $x \in \iota_S^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p})$, dann gibt es $y \in \mathfrak{p}$ und $s \in S$ mit $\frac{x}{1} = \iota_S(x) = \frac{y}{s}$. Dann gibt es $u \in S$ mit $u(xs - y) = 0$, also

$$x(us) = uy \in \mathfrak{p}.$$

Da $us \in S \subseteq R \setminus \mathfrak{p}$, muß der andere Faktor $x \in \mathfrak{p}$ sein, denn $\mathfrak{p}$ ist ein Primideal. Daher gilt

$$\mathfrak{p} = \iota_S^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p}).$$

Betrachten wir nun ein Primideal $\mathfrak{q} \subseteq S^{-1}R$ und setzen $\mathfrak{p} = \iota_S^{-1}(\mathfrak{q})$. Dann gilt nach dem Beweis von Proposition 3.33

$$S^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{q},$$

und die Bijektion ist bewiesen. Die Behauptung über die Inklusionsrelation folgt aus Proposition 3.33 (4). □

## 3.4. **Lokalisieren und Ganzheit.**

**Proposition 3.35.** *Sei $A \to B$ eine Ringhomomorphismus, so daß $B$ ganz über $A$ ist. Sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge.*
*Dann ist $S^{-1}A \to S^{-1}B$ ein Ringhomomorphismus, für den $S^{-1}B$ ganz über $S^{-1}A$ ist.*

*Beweis.* Sei $y \in S^{-1}B$ beliebig. Dann gibt es $s \in S$ und $b \in B$ mit $y = b/s$. Nach Voraussetzung ist $b$ ganz über $A$. Es gibt also ein normiertes Polynom $f \in A[X]$ mit $f(b) = 0$. Sei $d = \deg(f)$ der Grad von $f$. Das Polynom

$$g(X) = s^{-d} f(sX) \in S^{-1}A[X]$$

ist normiert und hat $g(y) = s^{-d} f(b) = 0$. □

**Proposition 3.36.** *Sei $A \subseteq B$ eine ganz abgeschlossene Ringerweiterung. Sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge.*
*Dann ist $S^{-1}A \to S^{-1}B$ eine ganz abgeschlossene Ringerweiterung.*

*Beweis.* Lokalisieren ist exakt, daher ist $S^{-1}A \to S^{-1}B$ auch injektiv. Wir nehmen nun ein $y = b/s$ mit $b \in B$, $s \in S$ und $y$ ist ganz über $S^{-1}A$. Es gibt dann ein normiertes Polynom

$$f(X) = X^d + \frac{a_1}{s_1}X^{d-1} + \ldots + \frac{a_{d-1}}{s_{d-1}}X + \frac{a_d}{s_d} \in S^{-1}A[X]$$

mit $f(y) = 0$. Durch Erweitern können wir annehmen, daß $s = s_1 = \ldots = s_d$. Das Polynom

$$g(X) = s^d f(X/s) = X^d + a_1X^{d-1} + a_2sX^{d-2} + \ldots + a_{d-1}s^{d-2}X + a_ds^{d-1} \in A[X]$$

ist normiert und

$$g(b) = s^d f(b/s) = s^d f(y) = 0 \in S^{-1}B.$$

Also $g(b) \in \ker(B \to S^{-1}B)$, d.h., es gibt ein $t \in S$ mit $tg(b) = 0 \in B$. Sei

$$h(X) = X^d + a_1tX^{d-1} + a_2st^2X^{d-2} + \ldots + a_{d-1}s^{d-2}t^{d-1}X + a_ds^{d-1}t^d \in A[X].$$

Dann ist

$$h(tb) = t^d g(b) = t^{d-1}(tg(b)) = 0.$$

Folglich ist $tb$ ganz über $A$, somit nach Voraussetzung $tb \in A$. Damit ist

$$y = \frac{b}{s} = \frac{tb}{ts} \in S^{-1}A.$$

□

**Satz 3.37.** *Sei $A$ ein Dedekindring und $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge, so daß es ein Primideal $\mathfrak{p} \neq 0$ von $A$ gibt mit $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$.*

*Dann ist auch $S^{-1}A$ ein Dedekindring, und zwar mit dem gleichen Quotientenkörper wie $A$.*

*Beweis.* Als Lokalisierung eines Integritätsrings ist $S^{-1}A$ ein Integritätsring mit dem gleichen Quotientenkörper $K$ wie $A$. Proposition 3.36 zeigt, daß $S^{-1}A \subseteq S^{-1}K = K$ ganz abgeschlossen ist, denn $A$ ist als Dedekindring in $K$ ganz abgeschlossen.

Jedes Ideal $\mathfrak{b}$ von $S^{-1}A$ ist von der Form $S^{-1}\mathfrak{a}$ für das Ideal

$$\mathfrak{a} = \{x \in A \ ; \ x/1 \in \mathfrak{b}\} \subseteq A.$$

Eine aufsteigende Idealkette in $S^{-1}A$ ist daher die Lokalisierung einer aufsteigenden Idealkette von $A$. Weil $A$ noethersch ist, wird diese stationär. Folglich ist auch $S^{-1}A$ noethersch.

Die Menge der Primideale von $S^{-1}A$ ist nach Satz 3.34 als bezüglich Inklusion partiell geordnete Menge mit einer Teilmenge von $\operatorname{Spec}(A)$ zu identifizieren. Die Dimension ist also

$$\dim S^{-1}A \leq \dim(A) = 1.$$

Nach Voraussetzung enthält $\operatorname{Spec}(S^{-1}A)$ zumindest $(0) \subsetneq \mathfrak{p}$ aus $\operatorname{Spec}(A)$. Damit ist

$$\dim S^{-1}A = 1. \qquad \square$$

*Notation* 3.38. Für jeden Ring $R$ und ein Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ ist die Lokalisierung an $R \setminus \mathfrak{p}$ besonders interessant. Wir bezeichnen den **lokalen Ring bei $\mathfrak{p}$** wie üblich mit

$$R_{\mathfrak{p}} = (R \setminus \mathfrak{p})^{-1}R$$

und für einen $R$-Modul $M$ mit

$$M_{\mathfrak{p}} = (R \setminus \mathfrak{p})^{-1}M.$$

**Korollar 3.39.** *Sei $A$ ein Dedekindring und $0 \neq \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Dann ist $A_{\mathfrak{p}}$ ein diskreter Bewertungsring.*

*Beweis.* Nach Satz 3.37 ist $A_{\mathfrak{p}}$ wieder ein Dedekindring. Per Konstruktion und Satz 3.34 hat $A_{\mathfrak{p}}$ nur die Primideale

$$\operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{p}}) = \{(0), \mathfrak{p}\}.$$

Daher hat $A_{\mathfrak{p}}$ nur ein maximales Ideal, ist somit ein lokaler Dedekindring. Nun folgt das Korollar aus Theorem 3.18. $\square$

*Notation* 3.40. Wir bezeichnen die diskrete Bewertung, die zu $A_{\mathfrak{p}}$ für einen Dedekindring $A$ und ein Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ gehört, mit

$$v_{\mathfrak{p}} : K^{\times} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}.$$

Dabei ist wie üblich $K$ der Quotientenkörper von $A$ und ebenso $A_{\mathfrak{p}}$.

*Beispiel* 3.41. Für den Dedekindring $\mathbb{Z}$ und das Primideal $\mathfrak{p} = (p)$ kommt bei $v_{\mathfrak{p}} = v_p$ gerade die $p$-adische Bewertung auf $\mathbb{Q}$ heraus.

3.5. **Lokale Eigenschaften.** Viele Eigenschaften erhalten sich beim Lokalisieren. Die besseren unter diesen lassen sich sogar dadurch nachweisen, dass man die Eigenschaft nach Lokalisieren an allen Primidealen verifiziert.

**Proposition 3.42.** *Sei $R$ ein Ring und $M$ ein $R$-Modul. Dann sind äquivalent:*

*(a)* $M = 0$.
*(b)* $M_{\mathfrak{p}} = 0$ *für alle Primideale* $\mathfrak{p}$ *von* $R$.
*(c)* $M_{\mathfrak{m}} = 0$ *für alle maximalen Ideale* $\mathfrak{m}$ *von* $R$.

*Beweis.* (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) ist trivial. Sei also (c) erfüllt und sei $x \in M$ beliebig. Dann ist

$$\operatorname{Ann}_R(x) = \{a \in R \,;\, ax = 0\}$$

das Annullatorideal von $x \in M$. Angenommen, $\operatorname{Ann}_R(x)$ ist ein echtes Ideal. Dann gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von $R$ mit $\operatorname{Ann}_R(x) \subseteq \mathfrak{m}$. Dies führt zu den folgenden Abbildungen:

$$M \supseteq \langle x \rangle_R \simeq R/\operatorname{Ann}_R(x) \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}.$$

Wir lokalisieren an $\mathfrak{m}$, was exakt ist und $(R/\mathfrak{m})_\mathfrak{m} = R/\mathfrak{m}$ hat. Somit erhalten wir mit

$$0 = M_\mathfrak{m} \supseteq (\langle x \rangle_R)_\mathfrak{m} \simeq (R/\operatorname{Ann}_R(x))_\mathfrak{m} \twoheadrightarrow (R/\mathfrak{m})_\mathfrak{m} = R/\mathfrak{m} \neq 0$$

einen Widerspruch. □

**Korollar 3.43.** *Sei $f : M \to N$ ein $R$-Modulhomomorphismus. Die Eigenschaften*

$$\mathscr{P} = \textit{injektiv, surjektiv, bijektiv, Nullabbildung}$$

*sind lokal, d.h. es sind äquivalent:*

*(a)* $f$ *hat* $\mathscr{P}$.
*(b)* $f_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ *hat* $\mathscr{P}$ *für alle Primideale* $\mathfrak{p}$ *von* $R$.
*(c)* $f_\mathfrak{m} : M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ *hat* $\mathscr{P}$ *für alle maximalen Ideale* $\mathfrak{m}$ *von* $R$.

*Beweis.* Da Lokalisieren exakt ist, gilt

$$\begin{aligned} \ker(f_\mathfrak{p}) &= \ker(f)_\mathfrak{p}, \\ \operatorname{coker}(f_\mathfrak{p}) &= \operatorname{coker}(f)_\mathfrak{p}, \\ \operatorname{im}(f_\mathfrak{p}) &= \operatorname{im}(f)_\mathfrak{p}. \end{aligned}$$

Das Korollar folgt nun aus Proposition 3.42 angewandt auf $\ker(f)$, $\operatorname{coker}(f)$, $\ker(f)$ und $\operatorname{coker}(f)$, oder $\operatorname{im}(f)$. □

**Korollar 3.44.** *Seien $N_1, N_2$ Untermoduln des $R$-Moduls $M$.*

*(1) Es sind äquivalent:*
  *(a)* $N_1 = N_2$.
  *(b)* $N_{1,\mathfrak{p}} = N_{2,\mathfrak{p}}$ *für alle Primideale* $\mathfrak{p}$ *von* $R$.
  *(c)* $N_{1,\mathfrak{m}} = N_{2,\mathfrak{m}}$ *für alle maximalen Ideale* $\mathfrak{m}$ *von* $R$.
*(2) Es sind äquivalent:*
  *(a)* $N_1 \subseteq N_2$.
  *(b)* $N_{1,\mathfrak{p}} \subseteq N_{2,\mathfrak{p}}$ *für alle Primideale* $\mathfrak{p}$ *von* $R$.
  *(c)* $N_{1,\mathfrak{m}} \subseteq N_{2,\mathfrak{m}}$ *für alle maximalen Ideale* $\mathfrak{m}$ *von* $R$.

*Beweis.* (1) folgt aus (2) angewandt auf $N_1 \subseteq N_2$ und $N_2 \subseteq N_1$.

Aussage (2) folgt aus Korollar 3.43 angewandt auf das Nullsein der Komposition der Modulhomomorphismen

$$N_1 \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/N_2.$$

□

*Bemerkung* 3.45. Korollar 3.43 illustriert die folgende Methode. Man codiert eine Eigenschaft durch exakte Sequenzen, zeigt, daß die Sequenz nach Lokalisieren die entsprechende lokale Eigenschaft codiert, und schließt daraus, daß die Eigenschaft eine lokale Eigenschaft ist.

**Satz 3.46.** *Sei $A$ ein Dedekindring mit Quotientenkörper $K = \operatorname{Quot}(A)$. Dann gilt für den Schnitt in $K$*

$$A = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \max(A)} A_\mathfrak{p} = \{x \in K^\times \,;\, v_\mathfrak{p}(x) \geq 0 \quad \forall \mathfrak{p} \in \max(A)\} \cup \{0\}$$

*Beweis.* Die Lokalisierung $A_\mathfrak{p}$ ist natürlich ein Unterring von $K$. Der Satz ist also wohlformuliert.
Es gilt offensichtlich

$$A \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p}\in\max(A)} A_\mathfrak{p}.$$

Wir nehmen daher ein $f = x/y \in K^\times$, das im Schnitt liegt, also für alle $\mathfrak{p}$ gibt es $w_\mathfrak{p} \in A_\mathfrak{p}$ mit $x = yw_\mathfrak{p}$. Wir betrachten weiter das Ideal in $A$

$$(y : x) = ((y) : (x)) = \ker(A \xrightarrow{x\cdot} A/yA) = \{z \in A \ ; \ zx \in (y)\}.$$

Dies lokalisiert gut wie man aus der Beschreibung als Kern sieht, also

$$(y : x)_\mathfrak{p} = ((y)_\mathfrak{p} : (x)_\mathfrak{p})$$

und das ist das Ideal $(y : x) \subseteq A_\mathfrak{p}$ für die Elemente $x = x/1, y = y/1 \in A_\mathfrak{p}$.

Aber lokal ist $x = yw_\mathfrak{p}$, daher $xA_\mathfrak{p} \subseteq yA_\mathfrak{p}$ und Multiplikation mit $x\cdot : A_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p}/yA_\mathfrak{p}$ ist die Nullabbidlung. Wenn aber bei Lokalisieren an allen maximalen Idealen die Nullabbildung rauskommt, dann war $x\cdot : A \to A/yA$ bereits die Nullabbildung. Ergo $x \in (y)$ und somit $f = x/y \in A$. □

*Bemerkung* 3.47. Wenn man auf die Beschreibung mit den Bewertungen $v_\mathfrak{p}(-)$ verzichtet, dann gilt der Satz allgemeiner für Integritätsringe. Man kann zeigen, daß man im Allgemeinen bei ganzabgeschlossenen noetherschen Ringen $A$ nur über die Primideale $\mathfrak{p}$ der Höhe 1 zu schneiden braucht. Das sind im Fall von Dedekindringen gerade die maximalen Primideale. Die dazugehörigen lokalen Ringe sind im ganzabgeschlossenen Fall auch allgemeiner diskrete Bewertungsringe.

**Definition 3.48.** Eine **endliche Stelle** eines Zahlkörpers $F$ ist eine diskrete Bewertung von $\mathfrak{o}_F$, die zu einem Primideal von $\mathfrak{o}_F$ gehört[a]. Wir bezeichnen die Menge aller endlichen Stellen von $F$ mit

$$M_{F,\mathrm{f}}$$

und die Lokalisierung in $v \in M_{F,\mathrm{f}}$ mit

$$\mathfrak{o}_{F,v} = \{x \in F^\times \ ; \ v(x) \geq 0\} \cup \{0\}.$$

[a] Als Korollar zum Satz von Ostrowski: das sind alle diskreten Bewertungen von $F$.

**Korollar 3.49.** *Sei $F$ ein Zahlkörper. Dann gilt:*

$$\mathfrak{o}_F = \bigcap_{v\in M_{F,\mathrm{f}}} \mathfrak{o}_{F,v}.$$

*Bemerkung* 3.50. Seien $F$ ein Zahlkörper und $v \in M_{F,\mathrm{f}}$ eine endliche Stelle. Ein $x \in K$ bezeichnet man als $v$-ganz (oder als lokal ganz bei $v$), wenn $x = 0$ oder $v(x) \geq 0$ (äquivalent $x \in \mathfrak{o}_{F,v}$) gilt. Korollar 3.49 besagt dann, daß die ganzen Elemente von $K$, also $\mathfrak{o}_F$, gerade die Elemente sind, die an allen endlichen Stellen von $F$ lokal ganz sind.

## 4. Die Klassengruppe

Die Klassengruppe ist eine wichtige arithmetische Invariante eines Dedekindrings. Sie mißt das Ausmaß des Versagens des Fundamentalsatzes der Arithmetik.

4.1. **Gebrochene und invertierbare Ideale.** Ideale sind „ideale Zahlen“, gebrochene Ideale sind dann „ideale Brüche“ mit beschränktem Nenner.

**Definition 4.1.** Sei $R$ ein Integritätsring mit Quotientenkörper $K$.
(1) Ein **gebrochenes Ideal** von $R$ ist ein $R$-Untermodul

$$I \subseteq K,$$

für das es ein $s \in R$ gibt, so daß
$$sI \subseteq R$$
ein Ideal ist.

(2) Das Produkt $IJ = I \cdot J$ zweier gebrochener Ideale ist der von den Produkten $xy$ mit $x \in I$ und $y \in J$ erzeugte $R$-Untermodul von $K$.

**Lemma 4.2.** *Das Produkt zweier gebrochener Ideale ist ein gebrochenes Ideal.*

*Beweis.* Seien $I, J$ zwei gebrochene Ideale und $s, t \in R$ mit $sI, tJ$ sind Ideale von $R$. Dann ist
$$st(I \cdot J) = (sI) \cdot (tJ)$$
auch ein Ideal von $R$, somit $IJ$ auch ein gebrochenes Ideal. □

**Lemma 4.3.** *Ist $R$ noethersch, so sind gebrochene Ideale von $R$ endlich erzeugte $R$-Moduln.*

*Beweis.* $I$ und $sI$ haben bis auf Skalieren mit $s$ die gleichen Erzeuger. □

**Definition 4.4.** Ein **invertierbares Ideal** von $R$ ist ein gebrochenes Ideal $I \subseteq R$, so daß es ein anderes gebrochenes Ideal $J \subseteq K$ gibt mit
$$I \cdot J = R.$$

*Beispiel* 4.5. Sei $R$ ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper $K$, diskreter Bewertung $v$ und Uniformisierende $\pi \in R$. Sei $I \subseteq K$ ein gebrochenes Ideal. Dann ist $I = (0)$ oder von der Form
$$I = \pi^n R = (\pi^n)$$
für das eindeutige $n \in \mathbb{Z}$ mit
$$n = \min\{v(x) \ ; \ x \in I\}.$$
Alle gebrochene Ideale $\neq (0)$ sind invertierbare Ideale:
$$(\pi^n)(\pi^{-n}) = R.$$

*Beispiel* 4.6. Sei $R$ ein Integritätsring mit Quotientenkörper $K$. Zu einem $x \in K^\times$ ist
$$(x) = Rx \subseteq K$$
ein gebrochenes Ideal. Gebrochene Ideale dieser Form nennt man **(gebrochene) Hauptideale**.

Gebrochene Hauptideale sind invertierbare Ideale, weil für alle $x, y \in K^\times$
$$(x)(y) = (xy)$$
und daher ist $(x^{-1})$ das Inverse zu $(x)$.

**Proposition 4.7.** *Sei $R$ ein Integritätsring. Die Menge*
$$I_R = \{I \ ; \quad \textit{invertierbares Ideal von } R\}$$
*ist eine abelsche Gruppe bezüglich Mupltilikation, die Idealgruppe von $R$.*

*Beweis.* Das ist offensichtlich, denn $R$ ist eine Eins für Multiplikation von gebrochenen Idealen, Assoziativität ist sowieso klar, und die Existenz eines Inversen wird ja gerade per Definition gefordert. Man muß nur kurz überlegen, daß $R$ ein invertierbares Ideal ist, und daß das Inverse zu einem invertierbaren Ideal selbst auch invertierbar ist. Aber das ist beides klar. □

**Proposition 4.8.** *Sei $R$ ein Integritätsring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Lokalisieren liefert einen Gruppenhomomorphismus*

$$I_R \to I_{S^{-1}R}$$
$$I \mapsto S^{-1}I$$

*Beweis.* Ist $K$ der Quotientenkörper von $R$ und $t \in R$ mit $tI \subseteq R$. Dann ist $S^{-1}I \subseteq S^{-1}K = K$ und $tS^{-1}I = S^{-1}(tI) \subseteq S^{-1}R$. Damit ist die Abbildung wohldefiniert.

Die Verträglichkeit von Lokalisieren mit Produkten von gebrochenen Idealen ist klar. □

*Beispiel* 4.9. Sei $R$ ein diskreter Bewertungsring mit Bewertung $v$ und Uniformisierende $\pi \in R$. Die Zuordnung

$$I_R \to \mathbb{Z}$$
$$I \mapsto v(I) := \min\{v(x) \ ; \ x \in I\}$$

ist ein Gruppenisomorphismus. Das folgt sofort, weil wir die Situation bei einem diskreten Bewertungsring so vollkommen explizit in der Hand haben.

**Satz 4.10.** *In einem Dedekindring $A$ sind alle gebrochenen Ideale $I \neq (0)$ invertierbar.*

*Beweis.* Wir raten das Inverse als die maximale Menge von Elementen von $K$, die in einem Inversen liegen können:

$$I' = \{x \in K \ ; \ xI \subseteq A\}.$$

Dies kann man anders schreiben als

$$I' = \ker(K \to \mathrm{Hom}_A(I, K/A))$$

wobei die Abbildung $x \in K$ auf die Linksmultiplikation $a \mapsto xa + A$ eingeschränkt auf $I$ ist:

$$x\cdot : I \to K/A.$$

Die Menge $I' \subseteq K$ ist offensichtlich ein $A$-Modul und für jedes $t \in I$ gilt per Definition $tI' \subseteq A$. Damit ist $I'$ ein gebrochenes Ideal.

Für jedes maximale Primideal $\mathfrak{p}$ von $A$ gilt (Lokalisieren ist exakt und verträglich mit Hom nach Satz 3.31)

$$\begin{aligned}(I')_\mathfrak{p} &= \ker(K \to \mathrm{Hom}_A(I, K/A))_\mathfrak{p} \\ &= \ker(K_\mathfrak{p} \to \mathrm{Hom}_A(I, K/A)_\mathfrak{p}) \\ &= \ker(K \to \mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(I_\mathfrak{p}, K_\mathfrak{p}/A_\mathfrak{p}) = (I_\mathfrak{p})'.\end{aligned}$$

Hier bezeichnen wir mit $(I_\mathfrak{p})'$ die ensprechende Konstruktion analog zu $I'$ angewandt auf die Lokalisierung $I_\mathfrak{p}$.

Wir müssen nur noch zeigen, daß die offensichtliche Inklusion

$$I \cdot I' \subseteq A$$

eine Gleichheit ist. Das dürfen wir nach Lokalisieren an maximalen Primidealen $\mathfrak{p}$ von $A$ testen. Dies führt zu

$$(I \cdot I')_\mathfrak{p} = I_\mathfrak{p}(I')_\mathfrak{p} = I_\mathfrak{p} \cdot (I_\mathfrak{p})' = A_\mathfrak{p}.$$

Und das gilt, weil $A_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring ist: Wenn $I_\mathfrak{p} = (\pi^n)$ für eine Uniformisierende $\pi \in A_\mathfrak{p}$, dann ist $(I_\mathfrak{p})' = (\pi^{-n})$. □

**Theorem 4.11.** *Sei $A$ ein noetherscher Integritätsring mit Quotientenkörpern $K$. Es sind äquivalent:*

*(a)* *Jedes gebrochene Ideal $I \neq (0)$ von $A$ ist invertierbar.*
*(b)* *$A$ ist ein Dedekindring.*

*Beweis.* Die eine Richtung haben wir eben in Satz 4.10 bewiesen. Wir nehmen also nun an, daß alle gebrochenen Ideale $I \neq (0)$ von $A$ invertierbar sind und müssen zeigen, daß $A$ ein Dedekindring ist.

Sei $\mathfrak{p} \neq (0)$ ein Primideal von $A$. Dann ist $\mathfrak{p}$ ein gebrochenes Ideal und nach Voraussetzung invertierbar. Es gibt also $I \subseteq K$ mit $\mathfrak{p} \cdot I = A$. Das gilt dann insbesondere mit

$$I = \mathfrak{p}' = \{x \in K \ ; \ x\mathfrak{p} \in A\},$$

weil in jedem Fall $I \subseteq \mathfrak{p}'$ und dann $A \subseteq \mathfrak{p} \cdot I \subseteq \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}' \subseteq A$.

Wir lokalisieren nun an $\mathfrak{p}$. Dann ist $\mathfrak{p}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ das maximale Ideal von $A_\mathfrak{p}$. Nach Lokalisieren in $\mathfrak{p}$ finden wir, daß

$$\mathfrak{p}_\mathfrak{p} \cdot (\mathfrak{p}')_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}.$$

Wie im Beweis von Theorem 3.18 folgt daraus, daß $\mathfrak{p}$ lokal in $A_\mathfrak{p}$ von einem Element erzeugt wird. Die lokale Charakterisierung von Dedekindringen also von diskreten Bewertungsringen aus Satz 3.16, zeigt, daß

$$A_\mathfrak{p}$$

ein diskreter Bewertungsring ist. Insbesondere ist $\dim(A_\mathfrak{p}) = 1$. Da nach Satz 3.34 Primidealketten unterhalb von $\mathfrak{p}$ in der Lokalisierung als Primidealketten derselben Länge überleben, und weil $\mathfrak{p}$ beliebig $\neq (0)$ gewählt war, folgt

$$\dim(A) = 1.$$

Es bleibt zu zeigen, daß $A$ ganz abgeschlossen in $K$ ist. Sei $\tilde{A} \subseteq K$ der ganze Abschluß von $A$ in $K$. Wir wollen zeigen, daß die Inklusion

$$A \subseteq \tilde{A}$$

eine Gleichheit ist. Das können wir lokal durch Lokalisieren in beliebigen maximalen Primidealen $\mathfrak{p}$ von $A$ testen. Nach Proposition 3.35 ist

$$A_\mathfrak{p} \subseteq (\tilde{A})_\mathfrak{p}$$

eine ganze Erweiterung. Weil $(\tilde{A})_\mathfrak{p} \subseteq K_\mathfrak{p} = K$ und $A_\mathfrak{p}$ als diskreter Bewertungsring selbst ganz abgeschlossen ist, folgt

$$A_\mathfrak{p} = (\tilde{A})_\mathfrak{p},$$

und das war zu zeigen. □

**Definition 4.12.** Sei $A$ ein Dedekindring und $\mathfrak{p}$ ein maximales Primideal. Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned} v_\mathfrak{p} : I_A &\to \mathbb{Z} \\ I &\mapsto v_\mathfrak{p}(I) = \min\{v_\mathfrak{p}(x) \ ; \ x \in I\}. \end{aligned}$$

*Bemerkung* 4.13. Die Abbildung $v_\mathfrak{p}$ auf gebrochenen Idealen ist die Komposition

$$I_A \xrightarrow{(-)_\mathfrak{p}} I_{A_\mathfrak{p}} \xrightarrow{v_\mathfrak{p}} \mathbb{Z},$$

wobei die zweite Abbildung diejenige aus Beispiel 4.9 ist. Insbesondere ist $v_\mathfrak{p}$ ein Gruppenhomomorphismus und

$$I_\mathfrak{p} = (\pi^{v_\mathfrak{p}(I)}).$$

Hier ist $\pi \in A_\mathfrak{p}$ eine Uniformisierende der diskreten Bewertung $v_\mathfrak{p}$.

**Definition 4.14.** Zu gebrochenen Idealen $I, J \subseteq K$ definieren wir das gebrochene Ideal

$$(I : J) = \{x \in K \ ; \ xJ \subseteq I\} = \ker(K \to \mathrm{Hom}_A(J, K/I)).$$

**Proposition 4.15.** *Seien $A$ ein Dedekindring und $\mathfrak{p}$ ein maximales Primideal.*
*Die Bewertung von gebrochenen Idealen hat die folgenden Eigenschaften: für alle gebrochenen Ideale $I, J$ und alle $x \in K^\times$ gilt:*

*(i)* $v_\mathfrak{p}(IJ) = v_\mathfrak{p}(I) + v_\mathfrak{p}(J)$,
*(ii)* $v_\mathfrak{p}(I + J) = \min\{v_\mathfrak{p}(I), v_\mathfrak{p}(J)\}$,
*(iii)* $v_\mathfrak{p}(I \cap J) = \max\{v_\mathfrak{p}(I), v_\mathfrak{p}(J)\}$,
*(iv)* $v_\mathfrak{p}((I : J)) = v_\mathfrak{p}(I) - v_\mathfrak{p}(J)$,
*(v)* $v_\mathfrak{p}((x)) = v_\mathfrak{p}(x)$.

*Beweis.* Nachrechnen im Fall eines diskreten Bewertungsrings. Der allgemeine Fall folgt nach Lokalisieren. □

**Proposition 4.16.** *Sei $I \subseteq K$ ein gebrochenes Ideal. Dann ist*

$$I = \{x \in K \ ; \ v_\mathfrak{p}(x) \geq v_\mathfrak{p}(I) \text{ für alle maximalen Primideale } \mathfrak{p}\}.$$

*Beweis.* Es gilt $x \in I \iff (x) \subseteq I \iff$ für alle maximalen Primideale $\mathfrak{p}$ von $A$ ist $(x)_\mathfrak{p} \subseteq I_\mathfrak{p}$, und das bedeutet gerade $v_\mathfrak{p}(x) \geq v_\mathfrak{p}(I)$. □

4.2. **Divisoren und Klassengruppe.** Wir wenden uns nun dem idealen Fall des Fundamentalsatzes der Arithmetik zu: der eindeutigen Primidealzerlegung.

**Proposition 4.17.** *Sei $A$ ein Dedekindring mit Quotientenkörper $K$. Für alle*
*(1)* *$x \in K^\times$ ist $v_\mathfrak{p}(x) \neq 0$*
*(2)* *gebrochenen Ideale $I \subseteq K$ von $A$ ist $v_\mathfrak{p}(I) \neq 0$*
*(3)* *Ideale $(0) \neq \mathfrak{a} \subseteq A$ ist $v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) \neq 0$*
*nur für endlich viele maximale Primideale $\mathfrak{p}$ von $A$.*

*Beweis.* Weil $v_\mathfrak{p}(x) = v_\mathfrak{p}((x))$ folgt (1) aus (2). Weil ein gebrochenes Ideal $I$ von der Form $s^{-1}\mathfrak{a}$ mit $s \in A$ und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist, und weil

$$v_\mathfrak{p}(I) = v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) - v_\mathfrak{p}(s),$$

folgt (2) aus (3) angewandt auf $\mathfrak{a}$ und $(s)$.

Wir müssen also (3) zeigen. Es gilt sowiesos $v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) \geq 0$ und $v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) > 0 \iff \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. (Nachweis durch Lokalisieren an allen maximalen Primidealen $\mathfrak{q}$ von $A$.) Damit folgt die Behauptung aus dem folgenden allgemeineren Satz. □

**Satz 4.18.** *In einem noetherschem Ring $R$ ist für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ die Menge*

$$V(\mathfrak{a})^0 := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \ ; \ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}, \text{ und kein Primideal } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}\}$$

*der **minimalen Primoberideale** endlich.*

*Beweis.* Der Beweis verwendet die wichtige Technik der **noetherschen Induktion**. Wir betrachten die Menge der Gegenbeispiele

$$\mathscr{B} = \{\mathfrak{a} \ ; \ \text{ Ideal von } R \text{ mit unendlich vielen minimalen Primoberidealen}\}.$$

Angenommen $\mathscr{B}$ ist nicht leer. Weil $R$ noethersch ist, gibt es dann ein maximales Gegenbeispiel $\mathfrak{a} \subseteq R$. Dann ist $\mathfrak{a}$ nicht Primideal, sonst wäre $\mathfrak{a}$ selbst das einzige minimale Primoberideal von $\mathfrak{a}$. Deshalb gibt es Zeugen $x, y \in R$ mit $x, y \notin \mathfrak{a}$ aber $xy \in \mathfrak{a}$. Betrachten wir $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + Rx$ und

$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + Ry$. Dann ist für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ auch $xy \in \mathfrak{p}$, also $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$. Daraus folgt $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{p}$, kurz

$$V(\mathfrak{a})^0 \subseteq V(\mathfrak{b})^0 \cup V(\mathfrak{c})^0.$$

Weil $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ echt größer sind als $\mathfrak{a}$, haben $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ jeweils nur endlich viele minimale Primoberideale, und damit dann auch $\mathfrak{a}$, Widerspruch. □

**Lemma 4.19.** *Sei $A$ ein Dedekindring und $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ seien maximale Primideale. Dann gilt*

$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} & \text{für } \mathfrak{p} = \mathfrak{q}, \\ A_{\mathfrak{p}} & \text{für } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}. \end{cases}$$

*Beweis.* Wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, dann ist die Behauptung trivial. Wenn $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, dann gibt es $s \in (A \setminus \mathfrak{p}) \cap \mathfrak{q} \neq \emptyset$, denn beide Primideale sind maximal. Also liegt $1 = s/s \in \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}$, und damit gilt $\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}} = (1) = A_{\mathfrak{p}}$. □

**Satz 4.20** (Eindeutige Primidealzerlegung)**.** *In einem Dedekindring $A$ haben gebrochene Ideale eindeutige Primidealzerlegung. Für jedes gebrochene Ideal $I \neq (0)$ gilt:*

*(1)* $I = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(I)}$*, wobei wir nur über die maximalen Primideale $\mathfrak{p}$ von $A$ mit $v_{\mathfrak{p}}(I) \neq 0$ multiplizieren und $\mathfrak{p}^n$ für $n \in \mathbb{Z}$ im Sinne von inverteirbaren Idealen gedacht ist.*

*(2) Wenn $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ paarweise verschieden sind und $n_i \in \mathbb{Z}$ mit*

$$I = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i^{n_i},$$

*dann ist $n_i = v_{\mathfrak{p}_i}(I)$ und $v_{\mathfrak{p}}(I) = 0$ für alle $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$.*

*Beweis.* (1) Das wichtigste ist, daß es sich nach Proposition 4.17 um ein endliches Produkt handelt. Das Produkt ist also wohldefiniert. Anschließend kann man die behauptete Gleichheit von gebrochenen Idealen nach Lokalisieren für alle maximalen Primideale $\mathfrak{p}$ beweisen. Aber lokalisiert steht da nur

$$I_{\mathfrak{p}} = \Big(\prod_{\mathfrak{q}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{q}}(I)}\Big)_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(I)})_{\mathfrak{p}} \cdot \prod_{\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}} (\mathfrak{q}^{v_{\mathfrak{q}}(I)})_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}})^{v_{\mathfrak{p}}(I)} \cdot \prod_{\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}})^{v_{\mathfrak{p}}(I)},$$

und das ist gerade die Definition von $v_{\mathfrak{p}}(I)$.

(2) Wenn $I = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i^{n_i}$, dann kann man für jedes $\mathfrak{p}$ lokalisieren und erhält

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}^{v_{\mathfrak{p}}(I)} = I_{\mathfrak{p}} = \Big(\prod_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i^{n_i}\Big)_{\mathfrak{p}} = \prod_{i=1}^{r} (\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}}^{n_i} = \begin{cases} (\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}})_i^n & \text{falls } \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i \text{ für ein } i. \\ A_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}})^0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgt sofort die Behauptung. □

Es gilt auch die Umkehrung: Primidealzerlegung charakterisiert Dedekindringe.

**Theorem 4.21** (Noether 1927)**.** *Ein noetherscher Integritätsring mit eindeutiger Primidealzerlegung ist ein Dedekindring.*

**Definition 4.22.** Sei $A$ ein Dedekindring.

(1) Ein **(Weil-)Divisor** von $A$ ist eine formale $\mathbb{Z}$-Linearkombination von maximalen Primidealen.

(2) Die **Divisorgruppe** ist die freie abelsche Gruppe auf der Menge der maximalen Primideale

$$\operatorname{Div}(A) = \bigoplus_{\mathfrak{p} \neq (0)} \mathbb{Z} \cdot \mathfrak{p}.$$

Das ist gerade die Gruppe der Divisoren von $A$.

**Korollar 4.23.** *Sei $A$ ein Dedekindring. Die Bewertungen der gebrochenen Ideale $v_\mathfrak{p}$ bilden zusammen einen Gruppenisomorphismus*

$$\begin{aligned} v \ : I_A &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Div}(A) \\ I &\mapsto \sum_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p}(I) \cdot \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Das folgt sofort aus der eindeutigen Primidealzerlegung in $A$ aus Satz 4.20. □

Sei $A$ ein Dedekindring mit Quotientenkörper $K$. Zu $x \in K^\times$ haben wir das **gebrochene Hauptideal** $(x) \in I_A$. Unter dem Isomorphismus mit der Divisorgruppe erhalten wir den **Hauptdivisor** zu $x$

$$\operatorname{div}(x) = \sum_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p}(x) \cdot \mathfrak{p}.$$

Die Zuordnung $\operatorname{div}(-)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

**Definition 4.24.** Sei $A$ ein Dedekindring mit Quotientenkörper $K$. Der Quotient

$$\operatorname{Cl}(A) = \operatorname{Div}(A)/\operatorname{div}(K^\times)$$

wird **Klassengruppe** (genauer **Divisorklassengruppe**) von $A$ genannt.

Unter der Picardgruppe verstehen wir hier[a] die Gruppe

$$\operatorname{Pic}(A) = I_A/\{(x) \ ; \ x \in K^\times\}.$$

der geborchenen Ideale modulo der gebrochenen Hauptideale.

[a] Das stimmt mit der üblichen Definition als Isomorphieklassen von projektiven Moduln, die lokal vom Rang 1 sind, zusammen mit dem Tensorprodukt als Verknüpfung überein.

*Bemerkung* 4.25. Es folgt sofort aus Korollar 4.23, daß

$$\operatorname{Pic}(A) \simeq \operatorname{Cl}(A).$$

Die Picardgruppe spricht über Ideale, also $A$-Moduln, während die Klassengruppe über Primideale modulo einer Relation spricht. Letzteres sind im allgemeineren Kontext Zykel bis auf rationale Äquivalenz. Diese beiden Standpunkte fallen für Dedekindringe zusammen, finden aber im Allgemeinen verschiedene Verallgemeinerungen.

**Proposition 4.26.** *Sei $A$ ein Dedekindring. Dann gibt es eine exakte Sequenz*

$$0 \to A^\times \to K^\times \xrightarrow{\operatorname{div}} \operatorname{Div}(A) \to \operatorname{Cl}(A) \to 0.$$

*Beweis.* Wir müssen nur zeigen, daß

$$A^\times = \{x \in K^\times \ ; \ \operatorname{div}(x) = 0\}$$

Trivialer Divisor $\operatorname{div}(x) = 0$ ist äquivalent zu $v_\mathfrak{p}(x) \geq 0$ und $v_\mathfrak{p}(x^{-1}) \geq 0$ für alle maximalen Primideale $\mathfrak{p}$. Nach Satz 3.46 bedeutet das gerade $x \in A$ und $x^{-1} \in A$, also $x \in A^\times$. □

**Korollar 4.27.** *Sei $A$ ein Dedekindring. Dann sind äquivalent:*

*(a)* $\operatorname{Cl}(A) = 0$.
*(b)* *$A$ ist Hauptidealring.*
*(c)* *$A$ ist faktoriell, d.h. noetherscher Integritätsring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung.*
*(d)* *In $A$ sind alle irreduziblen Elemente Primelemente.*

*Beweis.* (a) $\Longrightarrow$ (b): Wenn $\mathrm{Cl}(A) = 0$, dann ist $\mathrm{Pic}(A) = 0$ und somit jedes Ideal $\mathfrak{a} \in I_A$ von der Form $(x)$ für ein $x \in K^\times$. Weil $\mathfrak{a}$ ein Ideal ist, gilt dann

$$v_\mathfrak{p}(x) = v_\mathfrak{p}((x)) = v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) \geq 0$$

und nach Satz 3.46 bedeutet das gerade $x \in A$. Damit ist $\mathfrak{a} = (x)$ ein Hauptideal.

(b) $\Longrightarrow$ (c): Hauptidealringe sind faktoriell, siehe *Grundlagen der Algebra*.

(c) $\Longrightarrow$ (d): In faktoriellen Ringen sind irreduzible Elmente prim, weil sie ja eine Faktorisierung in Primelemente haben müssen.

(d) $\Longrightarrow$ (a): Wegen $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Pic}(A)$, müssen wir zu jedem gebrochenen Ideal zeigen, daß es ein Hauptideal ist. Es reicht dies für Erzeuger, also für die maximalen Primideale nach Satz 4.20, zu zeigen. Sei also $\mathfrak{p}$ ein maximales Primideal von $A$. Dann gibt es $0 \neq x \in \mathfrak{p}$. Das Element $x$ zerlegt sich als Produkt von irreduziblen Elementen, von denen ein Faktor bereits in $\mathfrak{p}$ liegen muß. Ohne Einschränkung ist $x$ bereits irreduzibel. Nun sagt (d), daß $x$ Primelement ist. Wir haben damit eine Primidealkette

$$(0) \subsetneq (x) \subseteq \mathfrak{p}.$$

Da $\dim(A) = 1$ folgt $\mathfrak{p} = (x)$. □

Für einen Zahlkörper gibt es eine spezielle Notation und Terminologie.

**Definition 4.28.** Die Klassenzahl des Zahlkörpers $F$ ist

$$\mathrm{Cl}_F := \mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_F)$$

und die Klassenzahl von $F$ ist die Ordnung der Klassengruppe

$$h_F = |\mathrm{Cl}_F|.$$

4.3. **Schwache Approximation.** Der folgende Satz hat Ähnlichkeit mit dem Mittag-Lefflerschen Satz aus der Funktionentheorie, wenn man bei den Bewertungen $v_\mathfrak{p}$ an Nullstellenordnungen im Punkte $\mathfrak{p}$ denkt.

**Satz 4.29** (Schwache Approximation)**.** *Sei $A$ ein Dedekindring mit Quotientenkörper $K$. Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ paarweise verschiedene maximale Primideale von $A$, und seien $x_i \in K$, $n_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, \ldots, r$.*

*Dann gibt es ein $x \in K$ mit*

*(i)* $v_{\mathfrak{p}_i}(x - x_i) \geq n_i$ *für alle $i = 1, \ldots, r$, und*

*(ii)* $v_\mathfrak{p}(x) \geq 0$ *für alle $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$.*

*Beweis.* Sei $s \in A$ mit $sx_i = a_i \in A$. Angenommen wir können den Satz beweisen für $a_i$ anstelle von $x_i$ mit $a \in A$ anstelle von $x \in K$ und den Approximationsbedingungen

(i) $v_{\mathfrak{p}_i}(a - a_i) \geq n_i + v_{\mathfrak{p}_i}(s)$ für alle $i = 1, \ldots, r$, und

(ii) $v_\mathfrak{p}(a) \geq v_\mathfrak{p}(s)$ für alle $\mathfrak{p}$ mit $v_\mathfrak{p}(s) > 0$.

In diesem Fall ist $x = a/s$ eine Lösung des ursprünglichen Approximationsproblems.

Wir dürfen also ohne Einschränkung verlangen, daß $x_i \in A$, alle $n_i \geq 0$ (das Problem ist nur schwerer mit größeren $n_i$) und wir suchen ein $x \in A$ mit

$$v_{\mathfrak{p}_i}(x - x_i) \geq n_i$$

für alle $i = 1, \ldots, r$. Die zweite Bedingung ist dann automatisch erfüllt.

Nun ist das Approximationsproblem linear. Wenn für alle $i = 1, \ldots, r$ ein $a_i \in A$ existiert, mit

$$v_{\mathfrak{p}_i}(a_i - x_i) \geq n_i$$

und für alle $j = 1, \ldots, r$, $j \neq i$

$$v_{\mathfrak{p}_j}(a_i) \geq n_j,$$

dann löst

$$x = a_1 + \ldots + a_r$$

aufgrund der Dreiecksungleichung für Bewertungen das ursprüngliche Approximationsproblem.

Sei also ohne Einschränkung $x_1 \in A$ beliebig und $x_2 = \ldots = x_r = 0$. Wenn $r = 1$, dann ist nichts zu tun, denn $x = x_1$ löst das Problem. Ansonsten betrachten wir das Ideal

$$\mathfrak{a} := \mathfrak{p}_1^{n_1} + \mathfrak{p}_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_r^{n_r} \subseteq A.$$

Nach Lokalisieren an einem belibigen maximalen Primideal $\mathfrak{q}$ ist $\mathfrak{a}_\mathfrak{q} = A_\mathfrak{q}$, denn ein Summand wird mindestens zu $A_\mathfrak{q}$. Folglich ist $\mathfrak{a} = A$. Wir können daher schreiben

$$x_1 = (x_1 - x) + x$$

mit $x \in \mathfrak{p}_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_r^{n_r}$ und $x - x_1 \in \mathfrak{p}_1^{n_1}$. Dieses $x$ ist das gesuchte Elemen. □

**Korollar 4.30** (Chinesischer Restsatz I)**.** *Sei $A$ ein Dedekindring. Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ paarweise verschiedene maximale Primideale von $A$, und seien $n_i \in \mathbb{N}_0$ für $i = 1, \ldots, r$. Dann gilt*

*(1)* $\prod_{i=1}^r \mathfrak{p}_i^{n_i} = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{p}_i^{n_i}$.

*(2)* *Die natürliche Abbildung*

$$A/\prod_{i=1}^r \mathfrak{p}_i^{n_i} \to \prod_{i=1}^r A/\mathfrak{p}_i^{n_i}$$

*ist ein Ringisomorphismus.*

*Beweis.* (2) Die Surjektivität der natürliche Abbildung $\pi : A \to \prod_{i=1}^r A/\mathfrak{p}_i^{n_i}$ ist im Prinzip eine äquivalente Umformulierung des schwachen Approximationssatzes (in der Form aus dem Beweis ohne Nenner). Der Kern besteht aus dem Schnitt

$$\ker(\pi) = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{p}_i^{n_i}$$

und so bleibt für (2) nur noch (1) zu zeigen.

(1) folgt nach lokalisieren an einem beliebigen maximalen Primideal $\mathfrak{q}$. Wenn $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$, dann steht auf beiden Seiten $A_\mathfrak{q}$. Ansonsten überlebt genau der Faktor mit $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}$, die anderen Faktoren des Produkts bzw. des Schnitts sind $A_\mathfrak{q}$ und tragen nichts bei. Dies reduziert auf den Fall $r = 1$ von nur einer Primidealpotenz, und die ist trivial. □

**Definition 4.31.** Zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ eines Rings $R$ heißen **teilerfremd**, wenn $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$ ist.

*Bemerkung* 4.32. Für einen Dedekindring $A$ sind Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ genau dann teilerfremd, wenn es kein maximales Primideal $\mathfrak{p}$ von $A$ gibt mit $v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) > 0$ und $v_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}) > 0$.

**Korollar 4.33** (Chinesischer Restsatz II)**.** *Sei $A$ ein Dedekindring und seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ teilerfremde Ideale von $A$. Dann gilt*

*(1)* $\mathfrak{ab} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

*(2)* *Die natürliche Abbildung*

$$A/\mathfrak{ab} \to A/\mathfrak{a} \times A/\mathfrak{b}$$

*ist ein Ringisomorphismus.*

*Beweis.* Die Primidealfaktorisierungen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ haben kein gemiensames Primideal als Faktor. Dann folgt das Korollar sofort aus Korollar 4.30 angewandt auf die Primidealfaktorisierungen von $\mathfrak{a}$, von $\mathfrak{b}$ und von $\mathfrak{ab}$. □

In einem Dedekindring findet man Elemente des Quotientenkörpers mit vorgegebenen Bewertung an endlich vielen Stellen:

**Korollar 4.34.** *Sei $A$ ein Dedekindring mit Quotientenkörper $K$. Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ paarweise verschiedene maximale Primideale von $A$, und seien $n_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, \ldots, r$. Dann gibt es ein $x \in K$ mit*
*(i)* $v_{\mathfrak{p}_i}(x) = n_i$ *für alle* $i = 1, \ldots, r$, *und*
*(ii)* $v_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0$ *für alle* $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$.
*Wenn alle $n_i \geq 0$ sind, dann findet man sogar $x \in A$.*

*Beweis.* Das ist eine Übungsaufgabe, die sofort aus dem schwachen Approximationssatz folgt. □

**Korollar 4.35.** *Ein Dedekindring mit nur endlich vielen Primidealen ist ein Hauptidealring.*

*Beweis.* Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ eine vollständige Liste der maximalen Primideale von $A$. Die Behauptung folgt sofort aus Korollar 4.34, weil damit für $A$ die Divisorabbildung

$$K^\times \twoheadrightarrow \operatorname{Div}(A) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z} \cdot \mathfrak{p}$$

surjektiv ist. □

**Korollar 4.36.** *Jedes gebrochene Ideal $I$ eines Dedekindrings $A$ kann von höchstens 2 Elementen erzeugt werden.*

*Beweis.* Sei $s \in K$ so gewählt, daß $\mathfrak{a} = sI$ ein Ideal ist. Es reicht offensichtlich, die Behauptung für $\mathfrak{a}$ zu zeigen.

Wenn $\mathfrak{a} = (0)$, dann ist nichts zu zeigen. Wir nehmen daher an, daß es $0 \neq x \in \mathfrak{a}$ gibt. Die Inklusion

$$(x) \subseteq \mathfrak{a}$$

ist nach Lokalisieren an $\mathfrak{p}$ ein Isomorphismus, wenn $v_{\mathfrak{p}}(x) = v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})$. Dies gilt an allen bis auf endlich vielen Stellen $\mathfrak{p}$. Wir nehmen die Liste der Ausnahmen $\mathfrak{p}$ und alle $\mathfrak{p}$ mit $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) > 0$:

$$\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s\} = \{\mathfrak{p} \ ; \ v_{\mathfrak{p}}(x) \neq v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) \text{ oder } v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) > 0\}.$$

Nach Korollar 4.34 können wir ein $y \in A$ finden mit

$$v_{\mathfrak{p}_i}(y) = v_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{a}) \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, s.$$

Dann ist $y \in \mathfrak{a}$ nach Proposition 4.16, und

$$(x, y) = \mathfrak{a},$$

dies gilt lokal an jedem maximalen Primideal $\mathfrak{p}$:

- Wenn $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$, dann ist $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = (x)_{\mathfrak{p}} \subseteq (x, y)_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$.
- Wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ für ein $i = 1, \ldots, s$, dann ist $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = (y)_{\mathfrak{p}} \subseteq (x, y)_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$. □

# Teil 2. Geometrie der Zahlen

## 5. Gitter

5.1. **Algebraische und topologische Eigenschaften von Gittern.** Ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum $V$ trägt eine natürliche Topologie durch Strukturtransport via eines Isomorphismus

$$V \simeq \mathbb{R}^n.$$

Je zwei dieser Isomorphismen unterscheiden sich um eine Automorphismus von $\mathbb{R}$, der die Topologie nicht verändert.

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines topologischen Raumes heißt diskret, wenn die von $X$ auf $A$ induzierte Topologie die diskrete Topologie ist, d.h. für alle $a \in A$ gibt es eine offene Umgebung $a \in U \subseteq X$ mit

$$U \cap A = \{a\}.$$

**Definition 5.1.** Ein **Gitter** in einem endlich dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $V$ ist eine diskrete Untergruppe $\Gamma \subseteq V$.

*Bemerkung* 5.2. Eine Untergruppe $\Gamma \subseteq V$ ist diskret genau dann, wenn $0 \in \Gamma$ diskret ist, d.h. wenn es eine offene Teilmenge $U \subseteq V$ gibt mit

$$U \cap \Gamma = \{0\}.$$

Translation ist ein Homöomorphismus und daher ist dann für alle $\gamma \in \Gamma$ die Menge $\gamma + U$ eine offenen Umgebung von $\gamma$, die als einzigen Gitterpunkt $\gamma$ enthält.

*Beispiel* 5.3. (1) $\mathbb{Z}[i] \subseteq \mathbb{C}$.
(2) $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$.
(3) Kein Gitter ist $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \subseteq \mathbb{R}$, obwohl auch $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \simeq \mathbb{Z}^2$ eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe ist.

**Lemma 5.4.** *Eine diskrete Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathbb{R}$ ist entweder $\Gamma = \{0\}$ oder es gibt ein $0 \neq x \in \mathbb{R}$ und*

$$\Gamma = \{nx \ ; \ n \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}.$$

*Beweis.* Die Menge

$$\{z \in \Gamma \ ; \ z > 0\}$$

ist entweder leer, dann haben wir $\Gamma = \{0\}$, oder aber sie besitzt als nach unten durch 0 beschränkte Menge ein Infimum $x$. Weil $\Gamma$ diskret ist und das Infimum ein Häufungspunkt von $\Gamma$, also ein Grenzwert einer Folge aus $\Gamma$ ist, muß besagte Folge letztendlich konstant werden: das Infimum ist ein Minimum (wird angenommen). Damit ist auch $x > 0$, denn jedes Element in der betrachteten Menge ist ja $> 0$.

Angenommen es gibt ein Element $z \in \Gamma \setminus \mathbb{Z} \cdot x$. Wir betrachten $\vartheta = z/x$ und setzen $n = \lfloor \vartheta \rfloor \in \mathbb{Z}$. Dann ist auch

$$z' = z - nx \in \Gamma \setminus \mathbb{Z} \cdot x,$$

aber nach Konstruktion

$$0 < z' < x.$$

Das ist ein Widerspruch zur Konstruktion von $x$. Folglich gilt schon $\Gamma = \mathbb{Z} \cdot x$ wie behauptet. □

**Satz 5.5.** *Sei $V$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\Gamma \subseteq V$ eine Untergruppe. Dann sind äquivalent:*

*(a)* *$\Gamma$ ist eine Gitter.*
*(b)* *$\Gamma$ ist als abelsche Gruppe von über $\mathbb{R}$ linear unabhängigen Vektoren erzeugt.*

*(c)* *Die natürliche Abbildung*
$$\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma \to V$$
*ist injektiv und* $\Gamma$ *ist eine endliche erzeugte abelsche Gruppe.*

*Beweis.* (b) $\implies$ (c): Sei $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ ein Erzeugendensystem von $\Gamma$ bestehend aus $\mathbb{R}$-linear unabhängigen Vektoren. Jedes Element in $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma$ hat dann die Form
$$\sum_{i=1}^{r} x_i \otimes \gamma_i$$
für gewisse $x_i \in \mathbb{R}$. Unter der natürlichen Abbildung nach $V$ wird dies auf die Linearkombination
$$x_1\gamma_1 + \ldots + x_r\gamma_r \in V$$
abgebildet. (c) folgt sofort.

(c) $\implies$ (a): Als Untergruppe eines $\mathbb{R}$-Vektorraums ist $\Gamma$ ohne Torsion. Daher gilt als abelsche Gruppe $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^r$ nach dem Struktursatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen. Die Abbildung $\Gamma \subseteq V$ faktorisiert dann als
$$\Gamma \simeq \mathbb{Z}^r \hookrightarrow \mathbb{R}^r = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^r \simeq \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma \hookrightarrow V$$
letzteres wegen (c). Die auf $\Gamma$ induzierte Topologie ist daher dieselbe, wie die auf $\mathbb{Z}^r \subseteq \mathbb{R}^r$, dem Standardgitter der ganzzahligen Vektoren im $\mathbb{R}^r$. Also ist $\Gamma$ diskret, somit ein Gitter.

(a) $\implies$ (b): Dies beweisen wir per Induktion über
$$r = \dim\langle\Gamma\rangle_{\mathbb{R}}.$$
Für $r = 0$ ist nichts zu tun. Für $r = 1$ ist $\Gamma$ diskret in $\langle\Gamma\rangle_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}$. Diesen Fall behandelt Lemma 5.4.

Wir nehmen nun an, daß der Satz bewiesen ist für $< r$. Seien $v_1, \ldots, v_r \in \Gamma$ linear unabhängige Vektoren. Seien
$$W_0 = \langle v_1, \ldots, v_{r-1}\rangle_{\mathbb{R}} \subset W = \langle v_1, \ldots, v_r\rangle_{\mathbb{R}} = \langle\Gamma\rangle_{\mathbb{R}}$$
und
$$\Gamma_0 = \Gamma \cap W_0.$$
Dann ist $\Gamma_0$ ein Gitter in $W_0$ und zwangsläufig
$$\dim\langle\Gamma_0\rangle_{\mathbb{R}} \leq \dim W_0 = r - 1.$$
Der Satz gilt somit für $\Gamma_0$. Seien $\gamma_1, \ldots, \gamma_{r-1}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\Gamma_0$ aus $\mathbb{R}$-linear unabhängigen Vektoren. Dann kann man die $v_1, \ldots, v_{r-1}$ durch die $\gamma_1, \ldots, \gamma_{r-1}$ ersetzen. Wir betrachten nun
$$\mathrm{pr} : \Gamma \subseteq W \to W/W_0 = \mathbb{R} \cdot v_r.$$
Das Bild $\bar\Gamma = \mathrm{pr}(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ ist ein Gitter, weil für alle $0 < c \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned}\bar\Gamma \cap \{av_r \;;\; |a| < c\} &= \mathrm{pr}\left((\Gamma \cap (W_0 \times (-c, c) \cdot v_r)\right) \\ &= \mathrm{pr}\left(\Gamma \cap \{x = av_r + \sum_{i=1}^{r-1} a_i\gamma_i \;;\; |a_i| \leq 1, |a| \leq c\}\right)\end{aligned}$$
Weil $\Gamma$ diskret und $\{x = av_r + \sum_{i=1}^{r-1} a_i\gamma_i \;;\; |a_i| \leq 1, |a| \leq c\}$ beschränkt ist, handelt es sich um eine endliche Menge. Somit ist $\bar\Gamma$ diskret in $\mathbb{R} \cdot v_r \simeq \mathbb{R}$. Erneut Lemma 5.4 zeigt $\bar\Gamma \simeq \mathbb{Z} \cdot \bar\gamma$.

Nun betrachten wir die kurze exakte Sequenz
$$0 \to \Gamma_0 \to \Gamma \xrightarrow{\mathrm{pr}} \bar\Gamma \to 0.$$
Wählen wir ein Urbild $\gamma_r \in \Gamma$ mit $\mathrm{pr}(\gamma_r) = \bar\gamma$, so folgt wie üblich
$$\Gamma = \langle\gamma_1, \ldots, \gamma_r\rangle_{\mathbb{Z}}$$
und dies zeigt (b). □

**Korollar 5.6.** *Jede $\mathbb{Z}$-Basis eines Gitters $\Gamma \subseteq \mathbb{R}$ ist auch $\mathbb{R}$-linear unabhängig.*

*Beweis.* Sofort aus dem Beweis von Satz 5.5 □

**Definition 5.7.** Ein Gitter $\Gamma$ in einem endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $V$ heißt **vollständig**, falls $\Gamma$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $V$ enthält, also $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma \simeq V$ gilt.

Sei $\Gamma \subseteq V$ ein vollständiges Gitter und $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine $\mathbb{Z}$-Basis, dann bezeichnen wir eine **Grundmasche** von $\Gamma$ (bezüglich $\underline{v}$) mit

$$\Phi = \Phi(\underline{v}) := \{x = \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \ ; \ 0 \leq t_i \leq 1 \text{ für alle } i = 1, \ldots, n\}.$$

**Satz 5.8.** *Sei $\Gamma \subseteq V$ ein Gitter. Dann sind äquivalent:*

*(a)* *$\Gamma$ ist vollständig.*

*(b)* *$V/\Gamma$ ist mit der Quotiententopologie kompakt.*

*(c)* *Es gibt eine beschränkte Menge $M \subseteq V$ mit*

$$V = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma + M.$$

*Beweis.* (a) $\Longrightarrow$ (b): Wenn $\Gamma$ vollständig ist, dann ist $\Phi$ kompakt und $\Phi \to V/\Gamma$ surjektiv. Als Bild einer kompakten Menge ist dann auch $V/\Gamma$ kompakt.

(b) $\Longrightarrow$ (c): Sei $\|.\|$ eine Norm auf $V$. Wir betrachten die Bilder der Mengen

$$U_r = \{x \in V \ ; \ \|x\| < r\}$$

unter $\pi : V \to V/\Gamma$. Die Bilder $\pi(U_r)$ in $V/\Gamma$ sind offen und wegen $\bigcup_{r>0} U_r = V$ ist

$$\bigcup_{r>0} \pi(U_r) = V/\Gamma.$$

Weil $V/\Gamma$ kompakt ist, reichen endlich viele dieser Bilder. Weil die Bilder aufsteigend ineinander enthalten sind, reicht schon eins, sagen wir $U_R$. Sei $M =$ Abschluß von $U_R$. Dann ist $M$ beschränkt und $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma + M = V$.

(c) $\Longrightarrow$ (a): Angenommen $\Gamma$ ist nicht vollständig. Dann ist algebraisch $\Gamma \subseteq V$ isomorph zu $\mathbb{Z}^r \subseteq \mathbb{R}^n$ als Untergruppe mit ganzzahligen Koordinaten und Einträgen 0 für die Koordinaten $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Dabei ist $r < n$, weil $\Gamma$ als nicht vollständig angenommen wird. Die Koordinate $x_n$ definiert dann eine Linearform

$$x_n : V \to \mathbb{R}$$

die auf $\Gamma$ identisch 0 ist und auf $M$ beschränkt. Daher ist $x_n$ auf $V = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma + M$ beschränkt: Widerspruch. □

5.2. **Metrische Eigenschaften von Gittern.** Nun betrachten wir ein vollständiges Gitter in einem euklidischen Vektorraum. Die zusätzliche metrische Eigenschaft macht die algebraisch ununterscheidbaren Gitter, alle sind isomorph zu $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, verschieden durch die relative Position von Orthonormalbasen zu Gitterbasen.

Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum der Dimension $n$. Dazu gehört ein translationsinvariantes Maß, eine Volumenform, die für eine ONB $e_1, \ldots, e_n$ von $V$ dem Würfel

$$\Phi(\underline{e}) = \{x = \sum_{i=1}^{n} t_i e_i \ ; \ 0 \leq t_i \leq 1 \text{ für alle } i = 1, \ldots, n\}$$

das Volumen

$$\mathrm{vol}(\Phi(\underline{e})) = 1$$

zuordnet. Nach der linearen Transformationsformel für das Volumen gilt dann für einen Endomorphismus $A$ mit $Ae_i = v_i$

$$\mathrm{vol}(\Phi(v_1, \ldots, v_n)) = |\det(A)|.$$

**Proposition 5.9.** *Sei $\Gamma \subseteq V$ ein vollständiges Gitter im euklidischer Vektorraum $(V, \langle -, - \rangle)$. Sei $\Delta_\Gamma$ die Diskriminante von $\Gamma$ bezüglich der Bilinearform $\langle -, - \rangle$. Es gilt*

$$\mathrm{vol}(V/\Gamma) = \mathrm{vol}(\Phi) = \sqrt{|\Delta_\Gamma|}.$$

*Beweis.* Wir führen Koordinaten bezüglich einer ONB $e_1, \ldots, e_n$ ein. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\Gamma$ und $A = (a_{ij}) = [v_1, \ldots, v_n]$ die Matrix mit den Spalten $v_i$, also $Ae_i = v_i$. Dann ist

$$A^t A = (\sum_{\nu=1} a_{\nu i} a_{\nu j}) = (\langle v_i, v_j \rangle)$$

die Gram'sche Matrix von $\langle -, - \rangle$ bezüglich der $v_1, \ldots, v_n$. Damit ist

$$\Delta_\Gamma = \det(\langle v_i, v_j \rangle) = \det(A^t)\det(A) = \det(A)^2 = \mathrm{vol}(\Phi(\underline{v}))^2. \qquad \square$$

**Definition 5.10.** Man versteht (mißbräuchlich) unter dem **Volumen von** $\Gamma$ die Zahl

$$\mathrm{vol}(\Gamma) = \mathrm{vol}(V/\Gamma) = \sqrt{|\Delta_\Gamma|}.$$

Eine bessere Terminologie ist **Ko-Volumen**.

**Definition 5.11.** Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A \subseteq V$ eine Teilmenge.

(1) $A$ ist **zentralsymmetrisch**, wenn $-A = A$.
(2) $A$ ist **konvex**, wenn für alle $x, y \in A$ die Strecke zwischen $x$ und $y$ in $A$ liegt, d.h. für alle $0 \leq t \leq 1$ gilt
$$tx + (1-t)y \in A.$$

**Satz 5.12** (Minkowskischer Gitterpunktsatz)**.** *Sei $\Gamma \subseteq V$ ein vollständiges Gitter in einem euklidischen Vektorraum $V$ der Dimension $n = \dim(V)$. Sei $M \subseteq V$ eine Teilemenge, die zentralsymmetrisch, konvex und meßbar ist. Wenn*

$$\mathrm{vol}(M) > 2^n \cdot \mathrm{vol}(\Gamma),$$

*dann enthält $M$ einen von $0$ verschiedenen Gitterpunkt von $\Gamma$.*

*Beweis.* Angenommen alle Translate $\gamma + \frac{1}{2}M$ für $\gamma \in \Gamma$ sind disjunkt. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(\Gamma) = \mathrm{vol}(\Phi) &\geq \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{vol}((\gamma + \frac{1}{2}M) \cap \Phi) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{vol}(\frac{1}{2}M \cap (\Phi - \gamma)) \\ &= \mathrm{vol}(\frac{1}{2}M \cap \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \Phi - \gamma) = \mathrm{vol}(\frac{1}{2}M) = 2^{-n}\,\mathrm{vol}(M)\end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Seien $\gamma_1 \neq \gamma_2$ Gitterelemente mit

$$x \in \gamma_1 + \frac{1}{2}M \cap \gamma_2 + \frac{1}{2}M.$$

Dann gibt es $m_1, m_2 \in M$ mit

$$x = \gamma_1 + \frac{1}{2}m_1 = \gamma_2 + \frac{1}{2}m_2.$$

Folglich ist

$$0 \neq \gamma_1 - \gamma_2 = (x - \frac{1}{2}m_1) - (x - \frac{1}{2}m_2) = \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}(-m_1).$$

Weil $M$ zentralsymmetrisch ist, haben wir $-m_1 \in M$, und weil $M$ konvex ist auch $\frac{1}{2}m_2+\frac{1}{2}(-m_1) \in M$. Somit ist

$$\gamma_1 - \gamma_2 \in \Gamma \cap M$$

der gesuchte Gitterpunkt. □

*Beispiel* 5.13. Sei $\Gamma \subseteq V$ ein vollständiges Gitter in einem euklidischen Vektorraum $V$, und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\Gamma$. Wir setzen für $r > 0$

$$B_r = \{x = \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \ ; \ -r < t_i < r\},$$

das ist der $r$-Ball in der sup-Norm bezüglich der Basis $v_1, \ldots, v_n$. Dann ist für alle $0 < r < 1$

$$B_r \cap \Gamma = \{0\}$$

und

$$\lim_{r \to 1} \mathrm{vol}(B_r) = 2^n \,\mathrm{vol}(\Gamma).$$

Da $B_r$ konvex und zentralsymmetrisch ist, zeigt dies, daß die Voraussetzung im Minkowskischen Gitterpunktsatz in Bezug auf die Abschätzung scharf ist.

## 6. Der Minkowski–Raum

Auf Minkowski gehen Ergebinsse zurück, die darauf beruhen, die ganzen Zahlen $\mathfrak{o}_F$ eines Zahlkörpers vom Grad $n = [F : \mathbb{Q}]$ als Gitterpunkte in einem $n$-Dimensionalen reellen euklidischen Raum aufzufassen.

6.1. **Unendliche Stellen eines Zahlkörpers.** Sei $F$ ein Zahlkörper vom Grad $n = [F : \mathbb{Q}]$. Die Menge der komplexen Einbettungen

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F, \mathbb{C})$$

hat $n$ Elemente. Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ wirkt durch Komposition auf den $\tau : F \to \mathbb{C}$, und zwar die komplexe Konjugation durch

$$\tau \mapsto \bar{\tau} = (a \mapsto \overline{\tau(a)}).$$

**Definition 6.1.** Die **unendlichen Stellen** des Zahlkörpers $F$ sind die $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$-orbits auf $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F, \mathbb{C})$. Wir bezeichnen diese als

$$M_{F,\infty} = M_{F,\mathbb{R}} \amalg M_{F,\mathbb{C}}$$

wobei die **reellen Stellen** $M_{F,\mathbb{R}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F, \mathbb{R})$ die Einbettungen $\rho : F \to \mathbb{R}$ sind, und die **komplexen Stellen** $M_{F,\mathbb{C}}$ aus Paaren von komplex konjugierten Einbettungen $\sigma, \bar{\sigma} : F \to \mathbb{C}$ bestehen, die nicht über $\mathbb{R}$ faktorisieren.

Die Anzahl der reellen Stellen bezeichnen wir mit $r = r_F$ und die der komplexen Stellen mit $s = s_F$.

**Proposition 6.2.** *Es gilt*

$$r + 2s = [F : \mathbb{Q}]$$

*Beweis.* Offensichtlich. □

**Satz 6.3.** *Sei $F$ ein Zahlkörper mit $s$ komplexen Stellen. Dann ist*

$$\mathrm{sign}(\Delta_F) = (-1)^s.$$

*Beweis.* Wir nehmen die Notation aus dem Stickelbergerschen Determinantensatz, Satz 2.34, wieder auf. Damit ist

$$\Delta_F = \det(\sigma_i(\alpha_j))^2 = (P-N)^2 \in \mathbb{Z}.$$

Die komplexe Konjugation auf $\mathbb{C}$ vertauscht konjugierte komplexe Einbettungen $\sigma, \bar\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ und fixiert die reellen Einbettungen $\rho : F \hookrightarrow \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Die entsprechende Permutation ist ein Produkt aus $s$ Transpositionen und hat Signum $(-1)^s$. Daher gilt

$$\overline{P-N} = (-1)^s(P-N)$$

und

$$\Delta_F = (P-N)^2 = (-1)^s\overline{P-N}\cdot(P-N) = (-1)^s|P-N|^2$$

mit demselben Vorzeichen wie $(-1)^s$. □

6.2. **Die lokale Beschreibung eines Zahlkörpers bei unendlichen Stellen.** Die Abbildung

$$\begin{aligned} j_{\mathbb{C}} : F_{\mathbb{C}} := F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} &\xrightarrow{\sim} \prod_{\tau : F \to \mathbb{C}} \mathbb{C} \\ a \otimes z &\mapsto j_{\mathbb{C}}(a \otimes z) = (\tau(a)z)_\tau \end{aligned} \tag{6.1}$$

ist ein $\mathbb{C}$-Algebrenisomorphismus[1]. In der Tat haben beide Seiten $\dim_{\mathbb{C}} = n$ und die lineare Unabhängigkeit der Charaktere zeigt die Injektivität.

Etwas weit hergeholt aber dennoch wahr stellt (6.1) einen Vergleichsisomorphismus zwischen der 0-ten de Rham Kohomologie von $\operatorname{Spec}(F)$ mit der 0-ten (Betti)-Singulären-Kohomologie von $\operatorname{Spec}(F)$ dar.

Zwar ist (6.1) $\mathbb{C}$-linear, dennoch sind die komplexen Konjugationen (also die reellen Strukturen) verschieden:

$$\begin{aligned} a \otimes z &\mapsto a \otimes \bar z \\ (x_\tau)_\tau &\mapsto (\bar x_\tau)_\tau. \end{aligned}$$

**Definition 6.4.** Wir bezeichnen mit **Frobenius bei** $\infty$ und der Notation $\Phi_\infty$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, welche das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} F_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\bar z} & F_{\mathbb{C}} \\ \big\downarrow{\scriptstyle j_{\mathbb{C}}} & & \big\downarrow{\scriptstyle j_{\mathbb{C}}} \\ \prod_\tau \mathbb{C} & \xrightarrow{\Phi_\infty} & \prod_\tau \mathbb{C}, \end{array}$$

die also die komplexe Konjugation von $F_{\mathbb{C}}$ auf $\prod_\tau \mathbb{C}$ transportiert.

**Lemma 6.5.** *Konkret ist*

$$\Phi_\infty((x_\tau)_\tau) = (\bar x_{\bar\tau})_\tau$$

*die gleichzeitige komplexe Konjugation der Komponenten von $x = (x_\tau)_\tau$ und die Permutation der Einbettungen $\tau : F \to \mathbb{C}$ mittels Komposition mit der komplexen Konjugation.*

[1] Alternative: Sei $F = \mathbb{Q}(\alpha)$ mit $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ normiertem Minimalpolynom vbon $\alpha$. Dann ist

$$f(X) = \prod_{\tau : F \to \mathbb{C}} (X - \tau(\alpha))$$

Wir finden $F = \mathbb{Q}[X]/(f)$ und berechnen nach dem Chinesischen Restsatz für Polynome

$$F_{\mathscr{C}} = \mathbb{Q}[X]/(f) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \mathbb{C}[X]/(f) \simeq \prod_\tau \mathbb{C}[X]/(X - \tau(\alpha)) = \prod_\tau \mathbb{C}$$

wobei der Isomorphismus gerade $a \otimes z$ auf $\tau(a)z$ in der $\tau$-Komponente abbildet.

*Beweis.*
$$\Phi_\infty(j_\mathbb{C}(a\otimes z)) = \Phi_\infty((\tau(a)z)_\tau) = (\overline{\bar\tau(a)z})_\tau = (\tau(a)\bar z)_\tau. \qquad \square$$

.

*Bemerkung* 6.6. Wir betrachten die semi-lineare Involution $\Phi_\infty$ als Wirkung der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ auf $\prod_\tau \mathbb{C}$.

6.3. **Die natürliche hermitesche Metrik.** Wir haben auf $F$ die Spurform und ebenso durch Erweiterung der Skalare die Spurform auf $F_\mathbb{C}$ als komplexe bilineare Form. Wir machen daraus eine hermitesche Form, indem wir das zweite Argument zuerst konjugieren:
$$\langle -,-\rangle : F_\mathbb{C}\times F_\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$
$$\langle a\otimes z, b\otimes w\rangle = \mathrm{tr}_F(ab)z\bar w.$$

Auf $\prod_\tau \mathbb{C}$ haben wir die hermitesche Standardform: für alle $x=(x_\tau)_\tau$ und $y=(y_\tau)_\tau$
$$\langle x,y\rangle = \sum_\tau x_\tau\bar y_\tau.$$

**Lemma 6.7.** *Die hermitesche Metrik auf $\prod_\tau \mathbb{C}$ ist $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$-äquivariant: für alle $x,y\in\prod_\tau\mathbb{C}$ gilt*
$$\langle\Phi_\infty(x),\Phi_\infty(y)\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}.$$

*Beweis.* Sei $x=(x_\tau)$ und $y=(y_\tau)$. Dann rechnen wir
$$\langle\Phi_\infty(x),\Phi_\infty(y)\rangle = \sum_\tau \Phi(x)_\tau\overline{\Phi(y)_\tau} = \sum_\tau \bar x_{\bar\tau}y_{\bar\tau} = \sum_\tau \bar x_\tau y_\tau = \overline{\textstyle\sum_\tau x_\tau\bar y_\tau} = \overline{\langle x,y\rangle}. \qquad \square$$

Wir identifizieren $F$ mittels $F\to F\otimes_\mathbb{Q}\mathbb{C}$ und $j_\mathbb{C}$ mit seinem Bild.

*Bemerkung* 6.8. Seien $a,b\in F$. Dann ist
$$\langle a,b\rangle = \sum_\tau \tau(a)\overline{\tau(b)} = \sum_\tau \tau(a)\bar\tau(b).$$
Das ist verwandt mit der Spurform
$$\mathrm{tr}_{F|\mathbb{Q}}(ab) = \sum_\tau \tau(ab) = \sum_\tau \tau(a)\tau(b),$$
aber eben nicht exakt die Spurform.

6.4. **Diskriminante und Volumen im Minkowski–Raum.** Wir gehen nun zur $\mathbb{R}$-Algebra
$$F_\mathbb{R} = F\otimes_\mathbb{Q}\mathbb{R}$$
über. Dies sind die Invarianten von $\mathbb{F}_\mathbb{C}$ unter der komplexen Konjugation. Entsprechend interessieren wir uns nun für den Minkowski–Raum.

**Definition 6.9.** Der **Minkowski–Raum** des Zahlkörpers $F$ ist
$$\Big(\prod_\tau\mathbb{C}\Big)^+ := \{x\in\prod_\tau\mathbb{C}\ ;\ \Phi_\infty(x)=x\}$$
als euklidischer Vektorraum bezüglich der Einschränkung von $\langle -,-\rangle$.

*Bemerkung* 6.10. Für $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$-Moduln $M$ bezeichnet man oft die Inverianten mit
$$M^+ = M^{\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})} = \{x\in M\ ;\ \sigma(x)=x \text{ für alle } \sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})\} = \mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}),M).$$

**Lemma 6.11.** *Die Einschränkung von $\langle -, - \rangle$ auf $\left(\prod_\tau \mathbb{C}\right)^+$ ist ein Skalarprodukt.*

*Beweis.* Für alle $x, y \in \left(\prod_\tau \mathbb{C}\right)^+$ gilt

$$\langle x, y\rangle = \langle \Phi_\infty(x), \Phi_\infty(y)\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}.$$

Also nimmt $\langle x, y\rangle$ Werte in $\mathbb{R}$ an. Weiter gilt $\langle x, x\rangle > 0$ für $x \neq 0$, weil $\langle -, -\rangle$ hermitesches Skalarprodukt ist. □

Die Abbildung $j_{\mathbb{C}}$ induziert einen Isomorphismus auf $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$-Invarianten:

$$j_{\mathbb{R}} : F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \Big(\prod_\tau \mathbb{C}\Big)^+.$$

**Satz 6.12.** *Sei $F$ ein Zahlkörper. Dann bildet*

$$j : F \to F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \Big(\prod_\tau \mathbb{C}\Big)^+$$

*jede Ordnung und jedes gebrochene Ideal von $F$ auf ein vollständiges Gitter des Minkowski–Raumes ab.*

*Beweis.* Für ein gebrochenes Ideal $I \subseteq F$ mit $s \in F^\times$ so daß $sI = \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}_F$, folgt

$$I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathfrak{a} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathfrak{o}_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = F,$$

denn $\mathfrak{a}$ hat endlichen Index in $\mathfrak{o}_F$. Allgemeiner gilt für jede Ordnung $\mathfrak{o}$ von $F$

$$\mathfrak{o} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = F.$$

Sei $\Gamma$ eine Ordnung $\mathfrak{o}$ oder ein gebrochenes Ideal $I \subseteq F$. Dann ist auch

$$\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = (\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}.$$

Wir haben somit ein Gitter nach Satz 5.5 und ein vollständiges Gitter per Definition von vollständig. □

**Satz 6.13.** *Sei $F$ ein Zahlkörper. Dann gilt*

$$\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_F) = \sqrt{|\Delta_F|}$$

*und anlog für jede Ordnung in $F$.*

*Beweis.* Sei $n = [F : \mathbb{Q}]$ und sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathfrak{o}_F$. Nummerieren wir mit $\tau_1, \ldots, \tau_n$ alle Einbettungen $F \hookrightarrow \mathbb{C}$. Dann betrachten wir die Matrix

$$A = (\tau_i(\alpha_j)) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

und finden die Gramsche Matrix zu $\langle -, -\rangle$ bezüglich $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ als

$$A^t \bar{A} = \Big(\sum_{k=1}^n \tau_k(\alpha_i)\overline{\tau_k(\alpha_j)}\Big)_{1 \le i,j \le n} = \Big(\sum_\tau \tau(\alpha_i)\overline{\tau(\alpha_j)}\Big) = \big(\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle\big).$$

Damit gilt

$$\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_F) = \sqrt{|\det(\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle)|} = \sqrt{|\det(A^t\bar{A})|} = |\det(A)|.$$

Die Diskriminante von $\mathfrak{o}_F$ haben wir bezüglich der Spurform definiert. Die zugehörige Gramsche Matrix ist

$$A^t A = \Big(\sum_\tau \tau(\alpha_i)\tau(\alpha_j)\Big) = \big(\mathrm{tr}_{F|\mathbb{Q}}(\alpha_i\alpha_j)\big),$$

somit

$$|\Delta_F| = \sqrt{|\det(\mathrm{tr}_{F|\mathbb{Q}}(\alpha_i\alpha_j))|} = \sqrt{|\det(A^tA)|} = |\det(A)|. \qquad \square$$

**Korollar 6.14.** *Sei $F$ ein Zahlkörper und $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}_F$ ein Ideal. Dann hat $j(\mathfrak{a})$ als vollständiges Gitter in $\left(\prod_\tau \mathbb{C}\right)^+$ das Kovolumen*

$$\mathrm{vol}(j(\mathfrak{a})) = \sqrt{|\Delta_F|} \cdot (\mathfrak{o}_F : \mathfrak{a}).$$

*Beweis.* Satz 6.13 und sinngemäß Korollar 2.31. $\square$

6.5. **Kanonisches Maß versus Lebesgue-Maß.** Mit dem Raum der Invarianten zu operieren ist für konkrete Rechnungen unpraktisch. Die Galoisoperation vertauscht Koordinaten gemäß der Galoisoperation auf Einbettungen $\tau : F \to \mathbb{C}$. Demnach ist

$$x = (x_\tau)_\tau \in \left(\prod_\tau \mathbb{C}\right)^+ \iff \begin{cases} x_\rho \in \mathbb{R} & \tau = \rho \text{ reell}, \\ x_{\bar\sigma} = \bar{x}_\sigma & \tau = \sigma \text{ komplex}. \end{cases}$$

Von den komplexen Einbettungen brauchen wir also nur die Hälfte.

Wir vereinbaren, daß von nun an $\rho \in M_{F,\mathbb{R}}$ und $\sigma$ über ein Vertretersystem von $M_{F,\mathbb{C}}$ laufen. Dann ist

$$j_\mathbb{R} : F \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \prod_\rho \mathbb{R} \times \prod_\sigma \mathbb{C}.$$

Betrachten wir auf den komplexen Koordinaten $z$ Realteil $\Re(z)$ und Imaginärteil $\Im(z)$ als reelle Koordinaten, so erhalten wir

$$j_\mathbb{R} : F \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \prod_\rho \mathbb{R} \times \prod_\sigma \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^{r+2s} = \mathbb{R}^n$$

verbunden mit einem weiteren Standardskalarprodukt, das wir mit

$$\langle -, - \rangle_L$$

bezeichnen. Ebenson bekommt die zugehörige Volumenform einen Index $L$. Wir folgen Neukirch und nennen das von $\prod_\tau \mathbb{C}$ induzierte Skalarprodukt das **kanonische Skalarprodukt**.

Leider sind die beiden Skalarprodukte nicht gleich, so daß es zu Skalierungen in den zugehörigen Volumenformen kommt.

**Proposition 6.15.** *Seien $x = (x_\tau)_\tau$, $y = (y_\tau)_\tau \in \left(\prod_\tau \mathbb{C}\right)^+$. Dann gilt:*

*(1)* $\langle x, y\rangle_L = \sum_\tau \lambda_\tau^{-1} \cdot x_\tau \bar{y}_\tau$ *mit*

$$\lambda_\tau = \begin{cases} 1 & \tau \text{ reell}, \\ 2 & \tau \text{ komplex}. \end{cases}$$

*(2)* $\langle x, y\rangle = \sum_\rho x_\rho y_\rho + 2\sum_\sigma \big(\Re(x_\sigma)\Re(y_\sigma) + \Im(x_\sigma)\Im(y_\sigma)\big)$.

*(3) Für ein vollständiges Gitter im Minkowski-Raum von $F$ gilt*

$$\mathrm{vol}(\Gamma) = 2^s \,\mathrm{vol}_L(\Gamma).$$

*Beweis.* (1) und (2) sind nur Ausdruck der folgenden Rechnung auf den komplexen Faktoren. Wir betrachten $z = a + ib, w = u + iv \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\langle z, w\rangle = z\bar{w} + \bar{z}w = 2\Re(z\bar{w}) = 2(au + bv) = 2\langle z, w\rangle_L.$$

Das Skalieren des Volumens in (3) folgt sofort. Die Gramsche Matrix bezüglich Standardskalarprodukt muß in $2s$ Spalten mit 2 skaliert werden, und zwar denen zu den reellen Koordinaten der komplexen Stellen, um die Gramsche Matrix bezüglich des kanonischen Skalarproduktes zu erhalten. Da das Volumen mit der Wurzel der Determinante dieser Matrix geht, folgt (3). $\square$

## 7. Endlichkeitssätze — additive Theorie

7.1. **Die Norm eines gebrochenen Ideals.** Sei $F$ ein Zahlkörper. Die Norm eines Ideals $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}_F$ ist definiert als

$$N(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{o}_F : \mathfrak{a}) = \#\mathfrak{o}_F/\mathfrak{a}.$$

Aufgrund des Chinesischen Restsatzes gilt für teilerfremde Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{o}_F$

$$N(\mathfrak{ab}) = N(\mathfrak{a})N(\mathfrak{b}).$$

Sei $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{o}_F$ ein maximales Primideal und $n \in \mathbb{N}_0$. Wir betrachten die Filtrierung durch Primidealpotenzen

$$\mathfrak{o}_F \supseteq \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}^2 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{p}^n.$$

Nach Lokalisieren bei $\mathfrak{p}$ gilt mit einer Uniformisierenden $\pi \in \mathfrak{o}_{F,\mathfrak{p}}$

$$\mathfrak{p}^r/\mathfrak{p}^{r+1} \simeq (\mathfrak{p}^r/\mathfrak{p}^{r+1})_{\mathfrak{p}} = (\pi^r)/(\pi^{r+1}) \simeq \mathfrak{o}_{F,\mathfrak{p}}/(\pi) \simeq \mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}.$$

Also gilt für alle $r$:

$$(\mathfrak{p}^r : \mathfrak{p}^{r+1}) = \#\mathfrak{p}^r/\mathfrak{p}^{r+1} = \#\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p} = N(\mathfrak{p})$$

und somit

$$N(\mathfrak{p}^n) = (\mathfrak{o}_F : \mathfrak{p}^n) = \prod_{r=0}^{n-1} (\mathfrak{p}^r : \mathfrak{p}^{r+1}) = N(\mathfrak{p})^n.$$

Insbesondere gilt daher für $\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}}$

$$N(\mathfrak{a}) = \prod_{\mathfrak{p}} N(\mathfrak{p})^{n_{\mathfrak{p}}}.$$

Die Norm setzt sich aufgrund der eindeutigen Primidealzerlegung eindeutig zu einem Gruppenhomomorphismus fort.

**Definition 7.1.** Sei $F$ ein Zahlkörper. Wir setzen

$$I_F = I_{\mathfrak{o}_F}.$$

Die **Norm** eines gebrochenen Ideals ist der Wert des Normhomomorphismus

$$N : I_F \to \mathbb{Q}^\times,$$

der durch $N(\mathfrak{p}) = \#\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}$ auf Primidealen gegeben ist.

**Proposition 7.2.** *Es gilt für $x \in F^\times$*

$$N((x)) = |N_{F|\mathbb{Q}}(x)|.$$

*Beweis.* Beide Seiten sind multiplikativ, also nehmen wir ohne Einschränkung $x \in \mathfrak{o}_F$ an. Aus dem Elementarteilersatz folgt

$$(\mathfrak{o}_F : x\mathfrak{o}_F) = |\det(x\cdot : F \to F)|$$

mit der Determinante von $x\cdot$ als Endomorphismus des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $F$. Die Determinante ändert sich nicht bei Skalarerweiterung:

$$\det(x\cdot : F \to F) = \det(x\cdot : F_{\mathbb{C}} \to F_{\mathbb{C}}).$$

Über $\mathbb{C}$ kann $x\cdot$ mittels $j_{\mathbb{C}}$ in Diagonalform gebracht werden als:

$$j(x)\cdot = (\tau(x))_\tau \cdot : \prod_\tau \mathbb{C} \to \prod_\tau \mathbb{C},$$

und somit ist die Determinante gerade

$$\det(x\cdot : F_{\mathbb{C}} \to F_{\mathbb{C}}) = \prod_\tau \tau(x) = N_{F/\mathbb{Q}}(x). \qquad \square$$

**Lemma 7.3.** *Es gilt für ein gebrochenes Ideal $I$ von $F$:*

$$\mathrm{vol}(I) = N(I)\,\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_F) = N(I)\sqrt{|\Delta_F|}.$$

*Beweis.* Die Formel gilt für Ideale. Ferner, wenn $I \subseteq J$ eine Inklusion gebrochener Ideale ist, dann gibt es ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}_F$ mit

$$I = \mathfrak{a}J$$

und damit (teste nach Lokalisieren)

$$J/I \simeq \mathfrak{o}_F/\mathfrak{a}.$$

Somit gilt

$$\frac{N(I)}{N(J)} = N(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{o}_F : \mathfrak{a}) = (J : I) = \frac{\mathrm{vol}(I)}{\mathrm{vol}(J)},$$

weil eine Grundmasche zu $J$ genau $(J : I)$-mal in der Grundmasche zu $I$ aufgeht, eben durch Translation mit einem geeigneten Vertretersystem von $(J : I)$.

Damit gilt das Lemma für $I$ genau dann, wenn es für $J$ gilt. □

**Satz 7.4.** *Sei $F$ ein Zahlkörper und $c > 0$ eine relle Zahl. Dann gibt es nur endlich viele Ideale $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}_F$ mit*

$$N(\mathfrak{a}) \leq c.$$

*Beweis.* Für jedes maximale Primideal $\mathfrak{p}$ gibt es eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ mit $(p) = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$. Dann ist $\kappa(\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}$ ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum und

$$N(\mathfrak{p}) = p^{[\kappa(\mathfrak{p}):\mathbb{F}_p]} \geq p.$$

Aufgrund der eindeutigen Primidealzerlegung reicht daher die Endlichkeit von

$$\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathfrak{o}_F)\ ;\ \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)\}$$

für jede Primzahl $p$. Aber das ist gerade die Menge der Primidealteiler von $p\mathfrak{o}_F$, also endlich. □

## 7.2. **Anwendung des Minkowskischen Gitterpunktsatzes.**

**Satz 7.5.** *Seien $F$ ein Zahlkörper und $I \in I_F$ ein gebrochenes Ideal. Seien $c_\tau \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben mit $c_\tau = c_{\bar\tau}$ für alle $\tau : F \to \mathbb{C}$ und*

$$\prod_\tau c_\tau > \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \cdot \sqrt{|\Delta_F|} \cdot N(I).$$

*Dann gibt es $0 \neq x \in I$, so daß für alle $\tau$ gilt:*

$$|\tau(x)| < c_\tau.$$

*Beweis.* Wir betrachten die Menge

$$X_c = \{x = (x_\tau)_\tau \in \Big(\prod_\tau \mathbb{C}\Big)^+\ ;\ |x_\tau| < c_\tau\}.$$

Diese Menge ist offensichtlich zentralsymmetrisch, konvex und meßbar.

Comment: Bild der Menge $X_c$; nicht Ball in sup-norm, obwohl das erstmal so aussieht.

Das Volumen ist

$$\mathrm{vol}(X_c) = 2^s\,\mathrm{vol}_L(X_c) = 2^s \prod_\rho 2c_\rho \cdot \prod_\sigma \pi c_\sigma^2 = 2^r(2\pi)^s \prod_\tau c_\tau$$

$$> 2^r(2\pi)^s \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \cdot \sqrt{|\Delta_F|} \cdot N(I) = 2^n\,\mathrm{vol}(I).$$

Die Existenz von $0 \neq x \in I \cap X_c$ folgt nun aus dem Minkowskischen Gitterpunktsatz, Satz 5.12. □

**Theorem 7.6** (Endlichkeit der Klassenzahl)**.** *Die Klassengruppe* $\mathrm{Cl}(F)$ *eines Zahlkörpers* $F$ *ist eine endliche abelsche Gruppe.*

*Beweis.* Nach Satz 7.4 reicht es zu zeigen, daß es eine uniforme obere Schranke $C$ gibt, so daß jedes gebrochene Ideal $I \in I_F$ ein Ideal $\mathfrak{a}$ als Vertreter seiner Klasse in $\mathrm{Cl}(F)$ mit

$$N(\mathfrak{a}) \leq C.$$

Wir fixieren $\varepsilon > 0$. Sei $I \in I_F$ beliebig. Wir wenden Satz 7.5 auf $I^{-1}$ und beliebige $c_\tau$ mit

$$\prod_\tau c_\tau = (1+\varepsilon) \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \cdot \sqrt{|\Delta_F|} \cdot N(I^{-1}) =: C \cdot N(I^{-1})$$

an. Wir finden $x \in I^{-1}$ mit

$$|N_{F|\mathbb{Q}}(x)| = |\prod_\tau \tau(x)| < \prod_\tau c_\tau.$$

Es ist $\mathfrak{a} = xI \subseteq I^{-1}I = \mathfrak{o}_F$ ein Ideal und

$$N(\mathfrak{a}) = \frac{N((x))}{N(I^{-1})} = \frac{|N_{F|\mathbb{Q}}(x)|}{N(I^{-1})} < \frac{\prod_\tau c_\tau}{N(I^{-1})} = (1+\varepsilon) \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \cdot \sqrt{|\Delta_F|} = C. \qquad \square$$

7.3. **Diskriminantenabschätzung.** Wir wollen eine bessere Abschätzung für die Norm eines Nichttrivialen Elements in einem gebrochenen Ideal und damit für einen Vertreter der Idealklasse in der Klassengruppe. Wir haben in Satz 7.5 mit einer Art Sup-Norm gearbeitet.

*Beispiel* 7.7. Seien $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit $d > 0$ und $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Wir betrachten eine Einbettung $F \subseteq \mathbb{R}$ als gegeben und nennen die andere $\tau : F \hookrightarrow \mathbb{R}$; die zugehörigen Koordinaten des Minkowski-Raums seien $x_1, x_\tau$. Die Norm ist dann

$$N_{F|\mathbb{Q}}(x) = x_1 x_\tau.$$

Comment: Bild: Gitter in $\mathbb{R}^2$ mit Niveaulinie der Norm, Bälle in verschiedenen Normen: $L^1, L^2, L^\infty$.

Gesucht ist ein zentralsymmetrisches, konvexes, meßbares $X \subseteq \mathbb{R}^2$ von Volumen

$$\mathrm{vol}(X) > 2^n \,\mathrm{vol}(\mathfrak{o}) = 4\sqrt{d},$$

auf dem

$$|N_{F|\mathbb{Q}}(-)| : X \to \mathbb{R}_{>0}$$

ein möglichst kleines Supremum hat.

Dem Bild nach zu urteilen, paßt bei gleicher Schranke für die Norm ein vom Volumen her größerer $L^1$-Ball im Vergleich zu einem $L^\infty$-Ball hinein. Umgekehrt bedeutet das, daß bei gleichem Volumen das Supremum der Norm auf dem $L^1$-Ball kleiner ist als das Supremum auf dem $L^\infty$-Ball.

Zu $t > 0$ betrachten wir

$$X(t) = \{x \in \Big(\prod_\tau \mathbb{C}\Big)^+ \;;\; \sum_\tau |x_\tau| \leq t\}.$$

So ein $X(t)$ ist zentralsymmetrisch, konvex und meßbar.

**Lemma 7.8.** *Sei* $F$ *ein Zahlkörper. Dann ist*

$$\mathrm{vol}(X(t)) = 2^r \cdot \pi^s \cdot \frac{t^n}{n!}.$$

*Beweis.* Wir setzen $X_{r,s} \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ als

$$X_{r,s}(t) = \{(x,z) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s \ ; \ \sum_{i=1}^{r} |x_i| + 2\sum_{j=1}^{s} |z_j| \leq t\}.$$

Nun zeigen wir per Induktion nach $r, s$

$$\mathrm{vol}_L(X_{r,s}(t)) = 2^r \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^s \cdot \frac{t^n}{n!}.$$

- Für $r = s = 0$ ist das Volumen $= 1$. Das ist ok.
- Sei nun $r > 0$ und die Formel bereits bekann für $< r$. Dann gilt nach Fubini

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_L(X_{r,s}(t)) &= \int_{-t}^{t} \mathrm{vol}_L(X_{r-1,s}(t-|x|))dx \\ &= 2 \cdot \int_0^t 2^{r-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^s \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}dx = 2^r \left(\frac{\pi}{2}\right)^s \cdot \frac{x^n}{(n)!}\Big|_{x=0}^{x=t} = 2^r \left(\frac{\pi}{2}\right)^s \cdot \frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

- Sei nun $s > 0$ und die Formel bereits bekann für $< s$. Dann gilt nach Fubini

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_L(X_{r,s}(t)) &= \int_{z=x+iy \in B_{t/2}(0)} \mathrm{vol}_L(X_{r,s-1}(t-2|z|))dxdy. \\ &= \int_0^{t/2} \int_0^{2\pi} 2^r \left(\frac{\pi}{2}\right)^{s-1} \frac{(t-2\rho)^{n-2}}{(n-2)!} \rho \cdot d\rho d\vartheta \\ &= 2^r \left(\frac{\pi}{2}\right)^s \cdot \int_0^{t/2} \frac{4x(t-2x)^{n-2}}{(n-2)!}dx \qquad (y = t-2x) \\ &= 2^r \left(\frac{\pi}{2}\right)^s \cdot \int_0^t \frac{(t-y)y^{n-2}}{(n-2)!}dy = 2^r \left(\frac{\pi}{2}\right)^s \cdot \int_0^t \frac{ty^{n-2}}{(n-2)!} - \frac{y^{n-1}}{(n-2)!}dy \\ &= 2^r \left(\frac{\pi}{2}\right)^s \cdot \frac{1}{(n-2)!} \cdot \left(\frac{t^n}{n-1} - \frac{t^n}{n}\right) = 2^r \left(\frac{\pi}{2}\right)^s \cdot \frac{t^n}{(n-2)!} \cdot \frac{1}{n(n-1)} \\ &= 2^r \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^s \cdot \frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

□

**Definition 7.9.** Sei $F$ ein Zahlkörper vom Grad $n = [F : \mathbb{Q}]$ mit $s$ komplexen Stellen. Die Zahl

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^s \cdot \frac{n!}{n^n} \cdot \sqrt{|\Delta_F|}$$

nennt man die **Minkowski-Schranke**.

**Satz 7.10.** *Sei $F$ ein Zahlkörper.*

*(1) Sei $I \in I_F$ ein gebrochenes Ideal. Dann gibt es $0 \neq x \in I$ mit*

$$|N_{F|\mathbb{Q}}(x)| \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^s \cdot \frac{n!}{n^n} \cdot \sqrt{|\Delta_F|} \cdot N(I).$$

*(2) Die Ideale $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}_F$ mit*

$$N(\mathfrak{a}) \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^s \cdot \frac{n!}{n^n} \cdot \sqrt{|\Delta_F|}$$

*enthalten ein vollständiges Vertretersystem für die Klassengruppe* $\mathrm{Cl}(F)$.

*Beweis.* (1) Wenn $t > 0$ mit

$$\mathrm{vol}(X(t)) = 2^r \cdot \pi^s \cdot \frac{t^n}{n!} > 2^n \,\mathrm{vol}(I) = 2^n \sqrt{|\Delta_F|} \cdot N(I), \tag{7.1}$$

dann finden wir ein $0 \neq x \in I \cap X(t)$. Die Norm schätzt sich dann ab nach der Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischen Mittel zu

$$|N_{F|\mathbb{Q}}(x)| = \prod_\tau |\tau(x)| \leq \Big(\frac{1}{n}\sum_\tau |\tau(x)|\Big)^n \leq \Big(\frac{t}{n}\Big)^n.$$

Wir lassen nun $t \searrow t_0$, wobei für $t_0$ Gleichheit in (7.1) gilt, und bestimmen für jedes $t$ ein

$$x = x(t) \in I \cap X(t)$$

mit dieser Normabschätzung. Da $I$ diskret ist, enthält $I \cap X(t)$ für jedes $t$ nur endlich viele Gitterpunkte. Die Folge enthält daher eine konstante Teilfolge. Das entsprechende $x$ erfüllt die Normabschätzung immer noch im Limes $t \to t_0$, also

$$|N_{F|\mathbb{Q}}(x)| \leq \Big(\frac{t_0}{n}\Big)^n = \Big(\frac{n!}{n^n}\Big) \cdot \Big(\frac{4}{\pi}\Big)^s \sqrt{|\Delta_F|} \cdot N(I).$$

(2) Hier argumentieren wir genau wie im Beweis von Theorem 7.6 und nutzen (1) zur Abschätzung der Norm. □

**Theorem 7.11** (Minkowski)**.** *Sei $F$ ein Zahlkörper vom Grad $n = [F : \mathbb{Q}]$ mit $s$ komplexen Stellen. Dann gilt*

$$|\Delta_F| \geq \Big(\frac{\pi}{4}\Big)^{2s} \cdot \Big(\frac{n^n}{n!}\Big)^2 \geq \frac{1}{2\pi n} \cdot \Big(\frac{\pi}{4}\Big)^{2s} e^{2n-\frac{1}{6n}}.$$

*Beweis.* Wir wenden Satz 7.10 (1) auf $\mathfrak{o}_F$ an. Die Norm von $\mathfrak{o}_F$ ist $N(\mathfrak{o}_F) = 1$. Die Norm eines ganzen Elements ist wieder ganz, daher ergibt sich

$$1 \leq |N_{F|\mathbb{Q}}(x)| \leq \Big(\frac{4}{\pi}\Big)^s \cdot \frac{n!}{n^n} \cdot \sqrt{|\Delta_F|}.$$

Umstellung und Quadrieren liefert

$$|\Delta_F| \geq \Big(\frac{\pi}{4}\Big)^{2s} \cdot \Big(\frac{n^n}{n!}\Big)^2,$$

und die Stirling'sche Abschätzung

$$\frac{n!}{n^n} \leq \sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n+\frac{1}{12n}}$$

liefert den Rest. □

Wenn man die $L^\infty$-Ball basierte Abschätzung von Satz 7.5 benutzt, dann erhält man die schwächere Abschätzung

$$|\Delta_F| \geq \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{2s},$$

die insbesondere nicht von der Anzahl der reellen Stellen abhängt.

Abbildung 1 enthält in logarithmischer Skala für die Größe der Schranke $M(s,n)$ in rot:

$$\text{naive Schranke}(s,n) = \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{2s},$$

und in blau

$$\text{Minkowski-Schranke}(s,n) = \Big(\frac{\pi}{4}\Big)^{2s} \cdot \Big(\frac{n^n}{n!}\Big)^2,$$

und in grün die Variante mit der Sterling–Fromel

$$\frac{1}{2\pi n} \cdot \Big(\frac{\pi}{4}\Big)^{2s} e^{2n-\frac{1}{6n}}.$$

Grüne und blaue plots sind nicht zu unterscheiden. Dies zeigt die Güte der Sterling-Approximation.

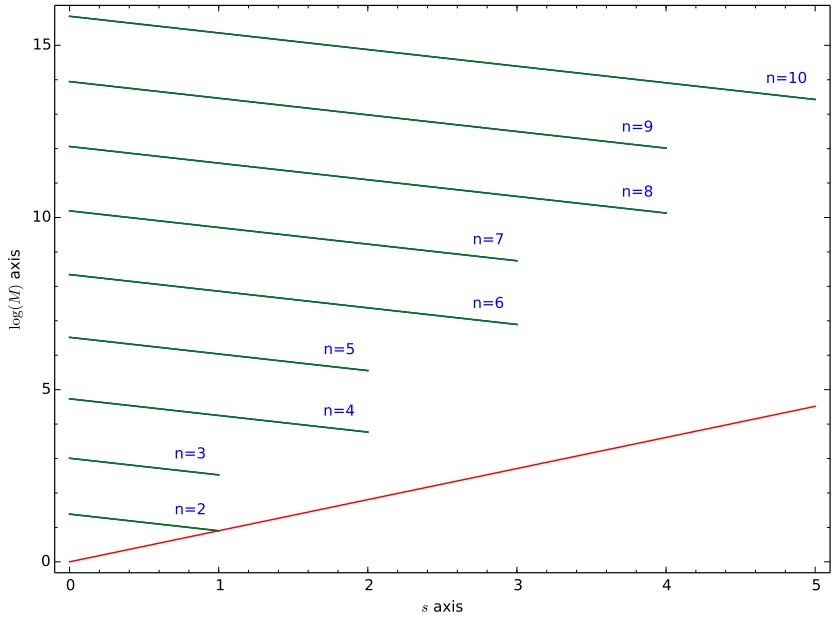



ABBILDUNG 1. Vergleich der Minkowski–Abschätzungen für $\Delta_F$.

**Korollar 7.12.** *Wenn in einer Folge von Zahlkörpern $F$ der Grad $[F:\mathbb{Q}] \to \infty$ geht, dann geht $|\Delta_F| \to \infty$.*

*Beweis.* Die Minkowskischranke ist monoton fallend in der Anzahl der komplexen Stellen $s$. Wir nutzen

$$|\Delta_F| \geq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2s} \cdot \left(\frac{n^n}{n!}\right)^2 \geq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n} \cdot \left(\frac{n^n}{n!}\right)^2 =: M_n.$$

Es gilt dann

$$M_{n+1} = M_n \cdot \frac{\pi}{4} \left(\frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{n^n \cdot (n+1)!}\right)^2 = M_n \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (1+\frac{1}{n})^{2n}.$$

Der Quotient strebt demnach für $n \to \infty$ auf

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{4} \cdot (1+\frac{1}{n})^{2n} = \frac{\pi}{4} \cdot e^2 \approx 5.8 > 1$$

und damit strebt $M_n \to \infty$. □

**Theorem 7.13** (Satz von Minkowski)**.** *Der einzige Zahlkörper $F$ mit $|\Delta_F| = 1$ ist $F = \mathbb{Q}$.*

*Beweis.* Die Rechnung aus dem Beweis von Korollar 7.12 läßt sich präzisieren: die Folge

$$(1+\frac{1}{n})^n \nearrow e$$

ist streng monoton steigend, ergo $\geq (1+\frac{1}{2})^2 = 9/4$ für $n \geq 2$. Damit ist

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} \geq \frac{\pi}{4} \cdot (1+\frac{1}{n})^{2n} \geq \frac{81\pi}{64} > 1.$$

Die Folge der unteren Schranken $M_n$ ist damit streng monoton steigend für $n \geq 2$. Und für $n = 2$ haben wir

$$M_2 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{2^2}{2!}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} > 2.$$

Somit ist für alle Zahlkörper $F \neq \mathbb{Q}$, weil die Diskriminante eine ganze Zahl ist:

$$|\Delta_F| \geq 3. \qquad \square$$

Jakob Stix, Institut für Mathematik, Goethe–Universität Frankfurt, Robert-Mayer-Str. 6–8, 60325 Frankfurt am Main, Germany
*Email address*: stix@math.uni-frankfurt.de